Departamento de Señales, Sistemas y Radicomunicaciones
Comunicaciones Digitales, Febrero 2011

◦ Responder los problemas en hojas independientes. La respuesta de cada problema cabe perfectamente en una hoja. En ningún caso se corregirán más de dos hojas por problema. ◦ Sólo se puntuarán aquellos apartados en que la solución esté **correctamente justificada** y recuadrada. ◦ No se permite el uso de documentación ni calculadora. ◦ Tiempo: 2 horas. ◦ **Publicación de notas:** 15 de febrero ◦ **Revisión de examen:** 18 de febrero, 15:30, C-301 (no es necesario apuntarse previamente).

Examen tipo A

Problema 1 (5 p.)
Se considera un sistema de transmisión digital en el que las señales están dadas por la base

$$\psi_k(t) = \sqrt{\frac{L}{T}} \operatorname{sinc} \frac{t-(k-1)T/L}{T/L}, \quad k = 1, \ldots, L.$$

1. ¿Es ésta una base ortonormal? ¿Verifica la condición de no interferencia entre símbolos multidimensional? (1,5 p.)

Las señales del alfabeto, equiprobables, son de la forma

$$s(t) = \sum_{k=1}^{L} A_k \psi_k(t),\ A_k = A_{kc} + jA_{ks},$$

donde los A_{kc}, A_{ks} toman todos las combinaciones de los valores $\{\pm c(2r-1),\, r = 1, \ldots, \sqrt{m}/2\}$, de forma que el alfabeto consta de $M = m^L$ señales. El canal añade ruido gaussiano complejo, con lo que que las señales recibidas son de la forma

$$r(t) = s(t) + n(t),\ n(t) = n_c(t) + jn_s(t)$$

donde $s(t)$ es una de las señales del alfabeto n_c y n_s son procesos de ruido blanco gaussiano independientes de densidad espectral de potencia bilateral N_0.

El receptor se basa en un único filtro con respuesta al impulso $h(t) = \sqrt{\frac{L}{T}} \operatorname{sinc} \frac{t}{T/L}$ cuya salida se muestrea en los instantes $t = 0, \ldots, (L-1)T/L$. Con la notación $r_k = r_{kc} + jr_{ks} = r(t) * h(t)|_{t=(k-1)T/L}$,

2. Expresar los r_k como productos escalares de $r(t)$ con señales de la base. (1 p.)

En adelante $L = 2$.

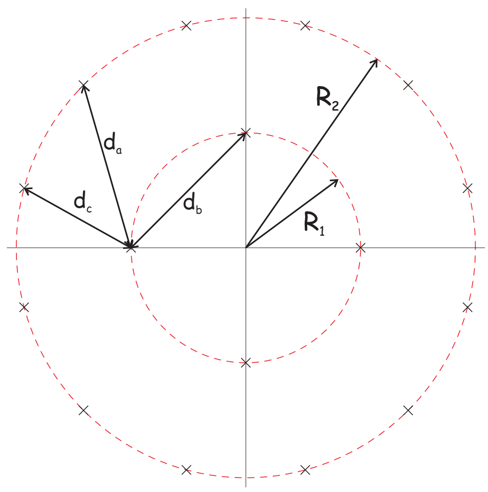
3. Escribir la función de densidad de probabilidad conjunta $f(r_{1c}, r_{1s}, r_{2c}, r_{2s}|s(t))$ si $A_1 = A_2 = c(1+j)$. (1 p).

4. Dar una expresión general lo más simplificada posible de la estimación de las amplitudes A_{kc}, A_{ks} a partir del vector de muestras $\mathbf{r} = (r_{1c}, r_{1s}, r_{2c}, r_{2s})$. Para $m = 4$, $c = 1$, calcular cuál es la señal transmitida más probable a posteriori si se recibe $\mathbf{r} = (1, -1{,}8, 0{,}8, -4)$ (1,5 p.).

Problema 2 por la otra cara

Problema 2 (5 p.)
La modulación cuya constelación, de señales equiprobables, se indica en la figura se ha construido partiendo de dos constelaciones PSK de 4 y 12 señales respectivamente. La relación $k = R_2/R_1$ es tal que la distancia cualquier señal a la señal más proxima ($d_{min,i}$) es siempre la misma y coincide con la d_c de la figura. Se pide:

1. Expresar en función de R_1 y k la energía media de la constelación. (0.5 p.)
2. Calcular d_{min} y k. Calcular β en función de R_1 y k. (1 p)
3. Dibujar las regiones de decision. Indicación: Las señales internas tienen seis vecinas, cuatro de las señales externas tienen cuatro vecinas y las demás tienen tres vecinas. Utilizar que la constelación, y por tanto el resultado, es invariante por giros de múltiplos de $\pi/2$. (1 p)
4. Encontrar, en función de las distancias d_a, d_b, d_c indicadas en la figura, una buena cota superior para la probabilidad de error de los simbolos externos. (1 p)
5. Id. internos. (0.5 p)
6. Acotar la probabilidad de error de la constelación. (1 p)



Soluciones

Problema 1

1. Las señales $\psi_k(t)$ serán un sistema ortonormal que verifica la condición de no IES multidimensional si

$$\langle \psi_k(t), \psi_l(t-nT)\rangle = 0 \ \text{ excepto si } k=l \text{ y } n=0,$$

es decir, si el conjunto

$$\{\psi_k(t-nT)\}_{k=1,\dots,L, n\in\mathbf{Z}}$$

es un sistema ortonormal. Notando $T_0 = T/L$ y

$$\varphi(t) = \sqrt{\frac{1}{T_0}}\operatorname{sinc}\frac{t}{T_0}$$

el conjunto de señales sin desplazar $n=0$ es

$$\varphi(t), \varphi(t-T_0), \dots, \varphi(t-(L-1)T_0),$$

las desplazadas $T = LT_0$ ($n=1$) son

$$\varphi(t-LT_0), \varphi(t-(L+1)T_0), \dots, \varphi(t-(2L-1)T_0),$$

y así sucesivamente, de forma que el conjunto global es el de todas las sinc desplazadas múltiplos enteros de T_0:

$$\{\varphi(t-mT_0)\}_{m\in\mathbf{Z}}.$$

Como el producto escalar de dos señales no varía si desplazamos las dos, para ver si se trata de un sistema ortonormal nos basta considerar productos de la forma $\langle\varphi(t), \varphi(t-kT_0)\rangle$. Por la fórmula de Parseval tenemos:

$$\langle\varphi(t), \varphi(t-kT_0)\rangle = \left\langle \sqrt{T_0} I_{-1/(2T_0),1/(2T_0)}(f), \sqrt{T_0}e^{-j2\pi kT_0 f} I_{-1/(2T_0),1/(2T_0)}(f)\right\rangle$$
$$= T_0\int_{-1/(2T_0)}^{1/(2T_0)} e^{-j2\pi kT_0 f}df,$$

que vale 1 para $k=0$ mientras que para k distinto de cero vale

$$\frac{1}{(-j2\pi k)}e^{-j2\pi kT_0 f}\Big|_{-1/(2T_0)}^{1/(2T_0)} = \frac{1}{(-j2\pi k)}\left[e^{-j\pi k} - e^{j\pi k}\right] = 0.$$

Por tanto se trata de una base ortonormal de un sistema libre de IES.

2. Sustituyendo en la fórmula de la convolución y notando de nuevo $T_0 = T/L$ tenemos

$$r_k = r(t) * h(t)|_{t=(k-1)T_0} = \int_{-\infty}^{\infty} r(t')h((k-1)T_0 - t')dt'.$$

Como $h(t) = h(-t)$, $h(t)$ es real, y $h(t-(k-1)T_0) = \psi_k(t)$,

$$r_k = \int_{-\infty}^{\infty} r(t')h(t'-(k-1)T_0)dt' = \langle r(t), \psi_k(t)\rangle .$$

3. Tenemos

$$r_k = \langle r(t), \psi_k(t)\rangle = \langle s(t), \psi_k(t)\rangle + \langle n(t), \psi_k(t)\rangle .$$

El primer producto vale

$$\langle s(t), \psi_k(t)\rangle = \langle A_1\psi_1 + A_2\psi_2, \psi_k\rangle \,.$$

Como $\{\psi_1, \psi_2\}$ es un sistema ortonormal, este producto vale

$$A_k = A_{kc} + jA_{ks}.$$

El segundo producto es

$$\langle n(t), \psi_k(t)\rangle = n_k = n_{kc} + jn_{ks}.$$

Por la ortonormalidad de $\{\psi_1, \psi_2\}$ sabemos que $(n_{1c}, n_{1s}, n_{2c}, n_{2s})$ es un vector aleatorio de componentes gaussianas independientes de media nula y varianza $\sigma^2 = N_0$. Por tanto el vector

$$(r_{1c}, r_{1s}, r_{2c}, r_{2s}) = (A_{1c}, A_{1s}, A_{2c}, A_{2s}) + (n_{1c}, n_{1s}, n_{1c}, n_{1s})$$

es de componentes gaussianas independientes de media $\mu = (A_{1c}, A_{1s}, A_{2c}, A_{2s})$ y varianza N_0, luego su fdp es

$$f(r_{1c}, r_{1s}, r_{2c}, r_{2s}) = \frac{1}{(2\pi)^2}\exp -\frac{(r_{1c}-A_{1c})^2 + (r_{1s}-A_{1s})^2 + (r_{2c}-A_{2c})^2 + (r_{2s}-A_{2s})^2}{2\sigma^2}.$$

donde $A_1 = A_2 = c(1+j) \Rightarrow A_{1c} = A_{1s} = A_{2c} = A_{2s} = c$.

4. Aplicando el criterio de decisión óptima (máxima probabilidad a posteriori), como las distintas amplitudes son equiprobables, tenemos, notando $V \equiv \{\pm c(2r-1),\ r = 1, \ldots, \sqrt{m}/2\}$,

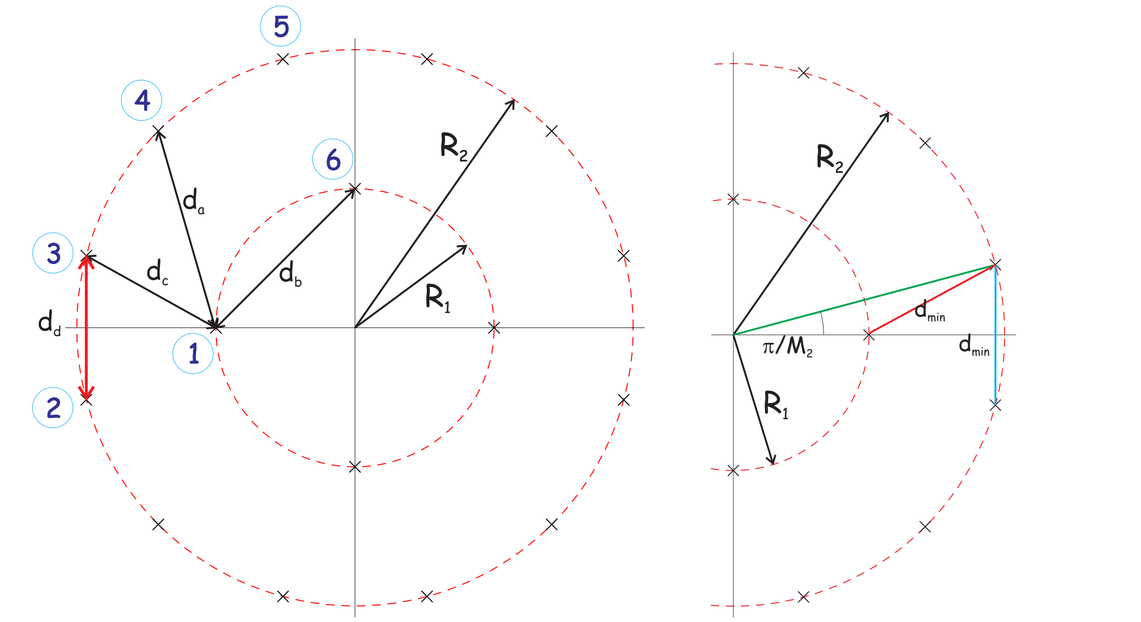
$$\begin{aligned}(\hat{A}_{1c}, \hat{A}_{1s}, \hat{A}_{2c}, \hat{A}_{2s}) \quad &= \arg\text{máx}_{A_{1c},A_{1s},A_{2c},A_{2s}\in V}\, f(r_{1c}, r_{1s}, r_{2c}, r_{2s}|A_{1c}, A_{1s}, A_{2c}, A_{2s}) \\ &= \arg\text{mín}_{A_{1c},A_{1s},A_{2c},A_{2s}\in V} \textstyle\sum_{k=1,2}\left[(r_{kc}-A_{kc})^2 + (r_{ks}-A_{ks})^2\right].\end{aligned}$$

Como cada variable minimiza un término de la suma, tenemos para $k = 1, 2$,

$$\hat{A}_{kc} = \arg\min_{A_{kc}\in V}(r_{kc}-A_{kc})^2$$
$$\hat{A}_{ks} = \arg\min_{A_{ks}\in V}(r_{ks}-A_{ks})^2.$$

Aplicamos el criterio sabiendo que para $m = 4$ y $c = 1$ el conjunto de amplitudes es, puesto que $\sqrt{m}/2 = 2/2 = 1$, $V = \{\pm c(2r-1), r = 1\} = \{-1, +1\}$, luego la frontera estará en el cero, de forma que se asignará $+1$ a los valores positivos y -1 a los negativos. En particular $\mathbf{r} = (1, -1{,}8, 0{,}8, -4) \Rightarrow (1, -1, 1, -1)$.

Problema 2



(a) (b)

1. Cuatro señales está a distancia R_1 y ocho a distancia $R_2 = kR_1$, luego

$$E_{av} = \frac{1}{16}\left(4R_1^2 + 12k^2R_1^2\right) = \frac{R_1^2}{4}\left(1 + 3k^2\right)$$

2. d_{min} es la correspondiente a una constelación 12 PSK [1] , esto es, $2R_2 \operatorname{sen}(\pi/12)$.

$$\beta = \frac{d_{min}^2}{E_{av}} = 4\frac{4R_2^2 \operatorname{sen}^2(\pi/12)}{R_1^2\left(1 + 3k^2\right)} = \frac{16k^2 \operatorname{sen}^2(\pi/12)}{1 + 3k^2}$$

   En relación a la figura (b), debe verificarse que

$$\left(R_2 \cos\left(\pi/12\right) - R_1\right)^2 + \left(\frac{d_{min}}{2}\right)^2 = d_{min}^2$$

   de donde

$$\frac{\sqrt{3}}{2}d_{min} = R_2 \cos\left(\pi/12\right) - R_1$$

   Además, debe ser $d_{min} = 2R_2 \operatorname{sen}(\pi/12)$, de donde

$$\sqrt{3}R_2 \operatorname{sen}(\pi/12) = R_2 \cos\left(\pi/12\right) - R_1$$

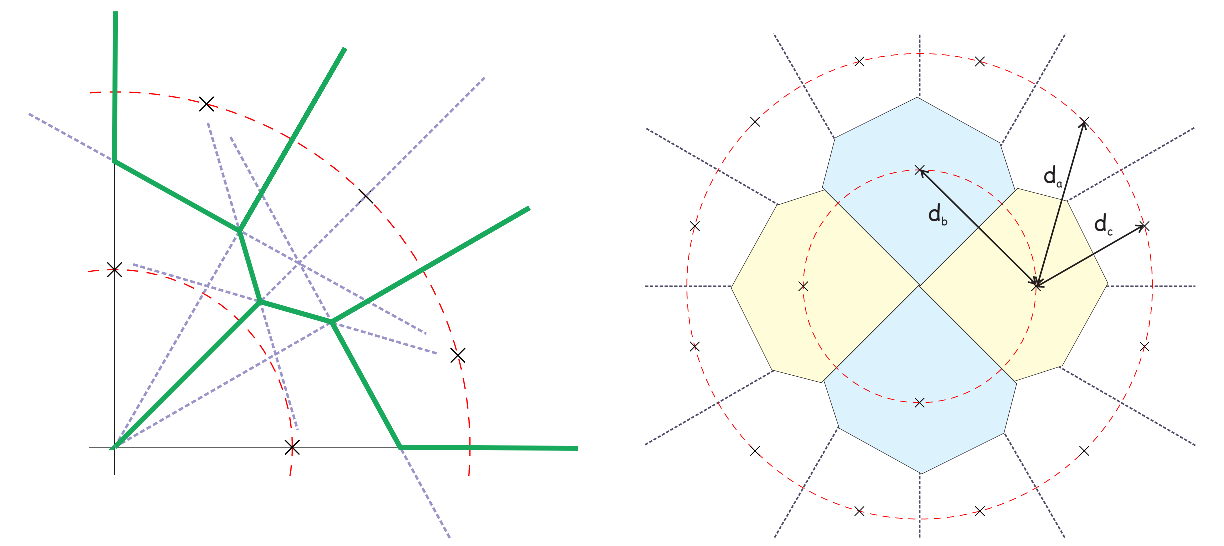
$$\frac{R_1}{R_2} = \frac{1}{k} = \cos\left(\pi/12\right) - \sqrt{3}\operatorname{sen}(\pi/12)$$

   luego

$$k = \frac{1}{\cos\left(\pi/12\right) - \sqrt{3}\operatorname{sen}(\pi/12)}$$

[1] Si, en la figura (a), $d_d < d_c$, entonces $d_{min} \neq d_c$. Por contra, si $d_d > d_c$ entonces $d_{4,min} = \text{mín}(d_{4,3}, d_{4,1}, d_{4,5}, d_{4,6}) = d_d \neq d_c$, por lo que debe ser $d_d = d_c$

3. La simetría de rotación permite resolver el problema calculando las fronteras de las regiones de decisión de, por ejemplo, el primer cuadrante. Para ello trazamos la perpendicular al segmento que une cada pareja de puntos y que pasa por su punto medio. Esas líneas están indicadas en trazo discontinuo en la figura (c). A partir de ellas pueden dibujarse las fronteras de las regiones de decisión correspondientes al primer cuadrante, y mediante sucesivos giros se obtienen las regiones de la figura (d)



(c) (d)

Aunque no nos lo piden, los valores de d_a, d_b y d_c pueden calcularse fácilmente. Puesto que las coordenadas de los puntos 4 y 1 son

$$(x_4, y_4) = (-R_2 \cos(\pi/4), R_2 \operatorname{sen}(\pi/4)) \qquad (x_1, y_1) = (-R_1, 0)$$

$$d_a^2 = \left(-R_2\frac{\sqrt{2}}{2} + R_1\right)^2 + \left(R_2\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = R_1^2 + R_2^2 - \sqrt{2}R_1R_2$$

$$d_a = \sqrt{R_1^2 + R_2^2 - \sqrt{2}R_1R_2} = R_1\sqrt{1 + k^2 - k\sqrt{2}}$$

$$d_b = \sqrt{R_1^2 + R_1^2} = R_1\sqrt{2}$$

$$d_c = d_{min} = 2R_2 \operatorname{sen}(\pi/12) = R_1 2k \operatorname{sen}(\pi/12)$$

4. Cada símbolo de la corona externa tiene cuatro o seis vecinos.

   a) Cuatro símbolos de la corona externa tienen 4 vecinos, dos que se encuentran a distancia $d_c = d_{min}$ y dos a distancia d_a, por lo que

   $$P_{e,e1} \leq 2Q\left(\frac{d_a}{2\sigma_n}\right) + 2Q\left(\frac{d_c}{2\sigma_n}\right)$$

   b) Los otros ocho tienen tres vecinos, todos a distancia $d_{min} = d_c$

   $$P_{e,e2} \leq 3Q\left(\frac{d_c}{2\sigma_n}\right)$$

5. Cada símbolo interno tiene 6 vecinos: dos a distancia d_a, otros dos, a distancia d_b y otros dos, a distancia d_c por lo que

$$P_{e,i} \leq 2Q\left(\frac{d_a}{2\sigma_n}\right) + 2Q\left(\frac{d_b}{2\sigma_n}\right) + 2Q\left(\frac{d_c}{2\sigma_n}\right)$$

6. Con todo esto

$$P_e \leq \frac{1}{16}\left(4P_{e,i} + 4P_{e,e1} + 8P_{e,e2}\right) = Q\left(\frac{d_a}{2\sigma_n}\right) + \frac{1}{2}Q\left(\frac{d_b}{2\sigma_n}\right) + \frac{5}{2}Q\left(\frac{d_c}{2\sigma_n}\right)$$