Departamento de Señales, Sistemas y Radicomunicaciones
Comunicaciones Digitales, Febrero 2012

○ Responder los problemas en hojas independientes.
○ No se permite el uso de documentación ni calculadora.
○ Tiempo: 2 horas.
○ **Publicación de notas:** 07-02-12
○ **Revisión de examen:** 10-02-12, 15:30, C-301 (no es necesario apuntarse previamente).

Examen tipo A

Problema 1 (5 p.)
Se desea comparar la modulación 8-PSK (modulación 1) con otra modulación unidimensional compleja de ocho señales equiprobables (modulación 2), formada por las seis señales de una modulación 6-PSK a las que se añade una señal en el origen de coordenadas y otra con coordenadas de la forma $0 + jc$, $c > 0$ de forma que la distancia mínima de cada señal a las demás siga siendo constante ($d_{min,i} = d_{min}$).
1. (1p) Representar gráficamente la modulación 2 y las regiones de decisión. Especificar con detalle el receptor óptimo.
2. (1p) Demostrar de forma general que la energía media de una constelación es igual a la energía del centro de masas de la constelación más la energía media de la constelación centrada (es decir, trasladada de forma que el centro de masas sea el origen de coordenadas).
3. (1p) Calcular la energía media de la modulación 2 en función de d_{min} después de centrarla.
4. (1p) Calcular la ganancia asintótica $\gamma_{b1}(P_E)/\gamma_{b2}(P_E)$.
5. (1p) Si las señales recibidas sufren una atenuación que reduce su amplitud a la mitad, pero el receptor sigue aplicando el mismo criterio de decisión, ¿cómo cambia $-\log P_E$ en el caso de la modulación 1? (Usar la cota inferior de P_E y la aproximación $-\log Q(x) \approx x^2/2$.) En el caso de la modulación 2, sin centrar, dar una cota inferior de nueva P_E.

Problema 2 (5 p.)
Cierta señal real, $\varphi(t)$ verifica que $\langle \varphi(t - n\Delta t), \varphi(t - m\Delta t) \rangle = \delta[n - m]$, donde $n, m \in \mathcal{Z}$, y $\delta[n]$ representa la secuencia impulso unitario, es decir $\delta[n] = 0$ excepto si $n = 0$ en cuyo caso es igual a la unidad.
1. (1p) Razonar si $\varphi(t) = \frac{1}{\sqrt{\Delta t}} \operatorname{sinc}(\frac{t}{\Delta t})$ verifica la condición del enunciado.
2. (1p) Idem si $\varphi(t)$ es la respuesta al impulso de un filtro en raíz de coseno alzado de factor de redondeo 0.5 y ancho de banda $(4\Delta t)^{-1}$.
3. (1p) Se definen las señales

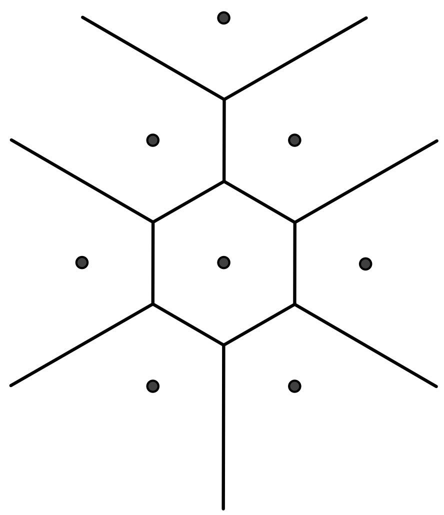
$$\psi_0(t) = a_{0,0} \cdot \varphi(t) + a_{0,1} \cdot \varphi(t - \Delta t), \quad \psi_1(t) = a_{1,0} \cdot \varphi(t) + a_{1,1} \cdot \varphi(t - \Delta t)$$

donde $a_{i,j} \in \mathcal{R}$. Calcular los valores $a_{i,j}$ para que $\{\psi_i\}_{i=0,1}$ sea un sistema ortonormal sabiendo que $a_{0,0} = a_{0,1}$, $a_{0,0} > 0$ y $a_{1,0} > 0$.
4. (1p) Se pretende diseñar un sistema de transmisión digital que emita cada $T = 2\Delta t$ segundos señales de la forma $s_n(t) = A_n\psi_0(t) + B_n\psi_1(t)$, con
$A_n, B_n \in \{\pm c \cdot (2k - 1), k = 1, \ldots, 2^{N-1}\}$.
Razonar si dicho sistema está libre de interferencia entre símbolos.
5. (1p) Calcular la eficacia espectral de la modulación anterior si $\Phi(f)$, transformada de Fourier de $\varphi(t)$, verifica que $\Phi(f) = 0$ si $|f| > W$.

Soluciones

Problema 1

1. Las señales son las de 6-PSK más la del origen más otra de coordenadas $\left(0, \sqrt{3}d_{min}\right)$.
   Diagrama de la modulación con las regiones de decisión.



Se debe incluir el diagrama detallado del receptor, basado en un único filtro, como corresponde a la dimensionalidad de la modulación (unidimensional compleja).

2. Si las s_i son una modulación centrada, es decir, $\sum_{i=1}^{M} P_i \mathbf{s}_i = \mathbf{0}$, y les sumamos $\mathbf{c}$, la energía media de la modulación resultante es

$$\mathcal{E}'_{av} = \sum_{i=1}^{M} P_i \left\langle \mathbf{s}_i + \mathbf{c}, \mathbf{s}_i + \mathbf{c} \right\rangle = \sum_{i=1}^{M} P_i \|\mathbf{s}_i\|^2 + 2\Re \left\langle \sum_{i=1}^{M} P_i \mathbf{s}_i, \mathbf{c} \right\rangle + \sum_{i=1}^{M} P_i \|\mathbf{c}\|^2$$
$$= \mathcal{E}_{av} + \|\mathbf{c}\|^2.$$

3. La energía media antes de centrar la modulación es

$$\mathcal{E}'_{av} = \frac{1}{8}\left(0 + 6 + 3\right) d_{min}^2 = \frac{9}{8} d_{min}^2.$$

Como el centro de masas es

$$\mathbf{c} = \left(0, \frac{\sqrt{3}}{8}\right)$$

la energía media de la modulación centrada vale

$$\mathcal{E}_{av} = \frac{9}{8} d_{min}^2 - \frac{3}{64} d_{min}^2 = \frac{69}{64} d_{min}^2.$$

4. Para 8-PSK tenemos

$$d_{min} = 2\sqrt{\mathcal{E}_{av}} \sin(\pi/M) \Rightarrow \beta_1 = \frac{d_{min}^2}{\mathcal{E}_{av}} = 4 \sin^2(\pi/8),$$

luego,

$$\frac{\gamma_{b1}}{\gamma_{b2sd}} \approx \frac{\beta_{2sd}}{\beta_1} = \frac{8/9}{4\sin^2(\pi/8)} = \frac{2}{9\sin^2(\pi/8)},$$
$$\frac{\gamma_{b1}}{\gamma_{b2d}} \approx \frac{\beta_{2d}}{\beta_1} = \frac{64/69}{4\sin^2(\pi/8)} = \frac{16}{69\sin^2(\pi/8)}.$$

5. Para la modulación 1 tenemos

$$-\log P_E \approx -\log Q\left(\frac{d_{min}/2}{\sigma_n}\right) \approx \frac{1}{2}\left(\frac{d_{min}/2}{\sigma_n}\right)^2.$$

Al reducirse la amplitud, el receptor sigue siendo el óptimo, pero ahora la distancia mínima es $d'_{min} = d_{min}/2$, luego

$$-\log P'_E \approx \frac{1}{2}\left(\frac{d'_{min}/2}{\sigma_n}\right)^2 = \frac{1}{4}\frac{1}{2}\left(\frac{d_{min}/2}{\sigma_n}\right)^2,$$

es decir,

$$-\log P'_E \approx -\log P_E/4.$$

Para la modulación 2 sin centrar observamos que las señales recibidas pasan a estar en seis casos sobre las fronteras de sus regiones de decisión y en un caso fuera de ella. Por tanto siete señales tendrán probabilidades de error superiores a 1/2, con lo que

$$P'_E = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{M} P_{Ei} \geq \frac{1}{8}\frac{7}{2} = 7/16.$$