Cierta señal real, $\varphi(t)$ verifica que $\langle \varphi(t - n\Delta t), \varphi(t - m\Delta t) \rangle = \delta[n-m]$, donde $n, m \in \mathcal{Z}$, y $\delta[n]$ representa la secuencia impulso unitario, es decir $\delta[n] = 0$ excepto si $n = 0$ en cuyo caso es igual a la unidad.

1. (1p) Razonar si $\varphi(t) = \frac{1}{\sqrt{\Delta t}} \operatorname{sinc}(\frac{t}{\Delta t})$ verifica la condición del enunciado.

2. (1p) Idem. si $\varphi(t)$ es la respuesta al impulso de un filtro en raíz de coseno alzado de factor de redondeo 0.5 y ancho de banda $(4\Delta t)^{-1}$?

3. (1p) Se definen las señales

$$\psi_0(t) = a_{0,0} \cdot \varphi(t) + a_{0,1} \cdot \varphi(t - \Delta t)$$
$$\psi_1(t) = a_{1,0} \cdot \varphi(t) + a_{1,1} \cdot \varphi(t - \Delta t)$$

donde $a_{i,j} \in \mathcal{R}$. Calcular los valores $a_{i,j}$ para que $\{\psi_i\}_{i=0,1}$ sea un sistema ortonormal sabiendo que $a_{0,0} = a_{0,1}$, $a_{0,0} > 0$ y $a_{1,0} > 0$.

4. (1p) Se pretende diseñar un sistema de transmisión digital que emita cada $T = 2\Delta t$ segundos señales de la forma $s_n(t) = A_n\psi_0(t) + B_n\psi_1(t)$, con $A_n, B_n \in \left\{\pm c \cdot (2k-1), k = 1, \ldots, 2^{N-1}\right\}$. Razonar si dicho sistema está libre de interferencia entre símbolos.

5. (1p) Calcular la eficacia espectral de la modulación anterior si $\Phi(f)$, transformada de Fourier de $\varphi(t)$, verifica que $\Phi(f) = 0$ si $|f| > W$

1. Como sabemos, la condición de no interferencia entre símbolos puede escribirse de varias maneras, equivalentes entre sí. Una de ellas es $\langle \varphi(t - n\Delta t), \varphi(t - m\Delta t) \rangle = \delta[n - m]$. Como sabemos, la transformada de Fourier de la función sinc es un pulso rectangular:

$$\Phi(f) = \mathcal{F}(\varphi(t)) = \mathcal{F}\left(\frac{1}{\sqrt{\Delta t}} \operatorname{sinc}\left(\frac{t}{\Delta t}\right)\right) = \sqrt{\Delta t} \cdot I_{-\frac{1}{2\Delta t}, \frac{1}{2\Delta t}}(f)$$

   Aplicando el criterio de Nyquist, no existe IES si

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} X\left(f - \frac{n}{\Delta t}\right) = \Delta t$$

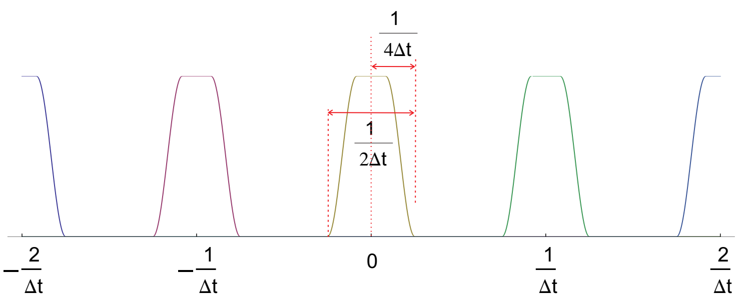
   donde $X(f) = \mathcal{F}(x(t))$, con $x(t) = \varphi(t) * \varphi^*(t)$. En nuestro caso:

$$X(f) = \left| \sqrt{\Delta t} \cdot I_{-\frac{1}{2\Delta t}, \frac{1}{2\Delta t}}(f) \right|^2 = \Delta t \cdot I_{-\frac{1}{2\Delta t}, \frac{1}{2\Delta t}}(f)$$

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \Delta t \cdot I_{-\frac{1}{2\Delta t}, \frac{1}{2\Delta t}}\left(f - \frac{n}{\Delta t}\right) = \Delta t$$

   con lo cual se verifica el criterio de Nyquist para Δt y en consecuencia $\langle \varphi(t - n\Delta t), \varphi(t - m\Delta t) \rangle = \delta[n - m]$.

2. Representando de manera aproximada réplicas del espectro situadas en múltiplos de $1/\Delta t$, como se comprueba en la figura adjunta, no es posible obtener una constante, luego no se verifica el criterio de Nyquist, existe interferencia entre símbolos y por tanto no se cumple la condición del enunciado.



3. Deben verificarse

$$\langle \psi_0(t), \psi_0(t) \rangle = \langle \psi_1(t), \psi_1(t) \rangle = 1 \quad \text{y}$$
$$\langle \psi_0(t), \psi_1(t) \rangle = 0$$

$$\begin{aligned}
\langle \psi_i(t), \psi_j(t) \rangle &= \langle a_{i,0} \cdot \varphi(t) + a_{i,1} \cdot \varphi(t - \Delta t), a_{j,0} \cdot \varphi(t) + a_{j,1} \cdot \varphi(t - \Delta t) \rangle = \\
&= a_{i,0} a_{j,0} \langle \varphi(t), \varphi(t) \rangle + a_{i,0} a_{j,1} \langle \varphi(t), \varphi(t - \Delta t) \rangle + \\
&\quad + a_{i,1} a_{j,0} \langle \varphi(t - \Delta t), \varphi(t) \rangle + a_{i,1} a_{j,1} \langle \varphi(t - \Delta t), \varphi(t - \Delta t) \rangle = \\
&= a_{i,0} a_{j,0} + a_{i,1} a_{j,1}
\end{aligned}$$

esto es, igual al producto escalar de los vectores $(a_{i,0}, a_{i,1})$ y $(a_{j,0}, a_{j,1})$. Luego

$$\langle \psi_0(t), \psi_0(t) \rangle = 1 \implies a_{0,0}^2 + a_{0,1}^2 = 2a_{0,0}^2 = 1 \implies a_{0,0} = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$$

y tomamos la solución positiva, tal y como indica el enunciado

$$\langle \psi_0(t), \psi_1(t) \rangle = 0 \implies a_{0,0}a_{1,0} + a_{0,1}a_{1,1} = 0 \implies a_{1,0} = -a_{1,1}$$

y por último

$$\langle \psi_1(t), \psi_1(t) \rangle = 1 \implies a_{1,0}^2 + a_{1,1}^2 = 2a_{1,0}^2 = 1 \implies a_{1,0} = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$$

donde, de nuevo, tomamos la solución positiva. En consecuencia

$$a_{0,0} = a_{0,1} = a_{1,0} = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad \text{y} \quad a_{1,1} = -\frac{1}{\sqrt{2}}$$

4. La condición de no interferencia entre símbolos para un periodo de símbolo T es:

$$\langle \psi_i(t-nT), \psi_j(t-mT) \rangle = \delta_{ij} \cdot \delta[n-m] \quad i,j = 0,1, \text{ y } n,m \in \mathcal{Z}$$

Si $n = m$

$$\langle \psi_i(t-nT), \psi_j(t-nT) \rangle = \langle \psi_i(t), \psi_j(t) \rangle = \delta_{ij}$$

Si $n \neq m$, desarrollando $\langle \psi_i(t-nT), \psi_j(t-mT) \rangle$:

$$\begin{aligned}
&\langle a_{i,0}\varphi(t-nT) + a_{i,1}\varphi(t-nT-\Delta t), a_{j,0}\varphi(t-mT) + a_{j,1}\varphi(t-mT-\Delta t)) \rangle = \\
&\langle a_{i,0}\varphi(t-2n\Delta t) + a_{i,1}\varphi(t-2n\Delta t-\Delta t), a_{j,0}\varphi(t-2m\Delta t) + a_{j,1}\varphi(t-2m\Delta t-\Delta t)) \rangle = \\
&\qquad = a_{i,0} \cdot a_{j,0} \cdot \delta[2(n-m)] + a_{i,0} \cdot a_{j,1} \cdot \delta[2(n-m)-1] + \\
&\qquad\quad + a_{i,1} \cdot a_{j,0}\delta[2(n-m)+1] + a_{i,1} \cdot a_{j,1}\delta[2(n-m)] = 0
\end{aligned}$$

y el sistema está libre de IES.

5. El ancho de banda ocupado es el ancho de banda de $\varphi(t)$, esto es, W. El número de señales es $M = \left(2 \cdot 2^{N-1}\right)^2 = 2^{2N}$,

$$R = \frac{\log_2(M)}{T} = \frac{\log_2\left(2^{2N}\right)}{2\Delta t} = \frac{2N}{2\Delta t} = \frac{N}{\Delta t}$$

luego la eficiencia espectral es:

$$\eta = \frac{R}{W} = \frac{N}{W\Delta t}$$