Departamento de Señales, Sistemas y Radicomunicaciones
Comunicaciones Digitales, febrero 2013

∘ Sólo se puntuarán aquellos apartados en que la solución esté **correctamente justificada**.
∘ No se permite el uso de documentación ni calculadora.
∘ El problema 2 se recogerá en 90 min. El problema 1 se recogerá 45 min. después.
∘ **Publicación de notas:** 01-02-13
∘ **Revisión de examen:** Se notifiicará durante el examen.

Examen tipo A

Problema 1 (3 p)
(Si se entrega este problema, su nota sustituirá a la del parcial. La nota por entrega de ejercicios no se verá afectada.)
Consideramos un sistema basado en las señales s_1 y s_2, reales y de la misma energía, con probabilidades P_1 y P_2.
(a) (1,5 p) Obtener una base ortonormal $\{\psi_1, \psi_2\}$ del espacio de señal aplicando el algoritmo de Gram-Schmidt a las señales $f_1 = s_1+s_2$, $f_2 = s_1-s_2$. Obtener las coordenadas de las señales s_1 y s_2 respecto de la base ortonormal obtenida en el apartado anterior. Utilizar la notación $\alpha = \|f_1\|$, $\beta = \|f_2\|$.
(b) (1,5 p) Se considera un receptor basado en los productos escalares $r_1 = \langle r, \psi_1\rangle$, $r_2 = \langle r, \psi_2\rangle$, siendo $r(t) = s_i(t) + n(t)$, donde $n(t)$ es ruido blanco gaussiano con densidad espectral de potencia $N_0/2$. Indicar las regiones de decisión. ¿Cuántos de estos productos son necesarios?

Problema 2 (7 p)
Partiendo de la constelación formada por las nueve señales de la forma

$$A\psi_1(t) + B\psi_2(t), A, B = -\alpha, 0, \alpha,$$

obtenemos una constelación de ocho señales equiprobables suprimiendo la señal con $A = B = \alpha$.
(a) (1 p) Dibujar la constelación y las regiones de decisión.
(b) (1 p) Calcular la probabilidad de error de la señal con $A = -\alpha$, $B = 0$ en función de α.
(c) (1 p) Acotar, en función de α, la probabilidad de error de la señal con $A = \alpha$, $B = 0$.
(d) (1 p) Calcular el parámetro $\beta = \frac{d^2_{min}}{\mathcal{E}_{av}}$ de la constelación.
(e) (1 p) Acotar inferior y superiormente la energía por bit normalizada γ_b que garantiza una probabilidad de error P_E.
(f) (1 p) Calcular, utilizando como aproximaciones las cotas inferiores, el cociente entre la $\gamma_b = \gamma_{b1}$ que garantiza una cierta P_E para la modulación que estamos considerando y la $\gamma_b = \gamma_{b2}$ que garantiza la misma P_E para una modulación ortogonal del mismo número de señales.
(g) (1 p) Indicar para qué valores del parámetro $\tau > 0$ las señales $\psi_1 = \sqrt{\frac{1}{\tau}} I_{0,\tau}$, $\psi_2 = \sqrt{\frac{1}{\tau}} I_{T/2,(T/2)+\tau}$ constituyen un sistema ortonormal libre de IES para periodo de símbolo T.

Departamento de Señales, Sistemas y Radicomunicaciones
Comunicaciones Digitales, febrero 2013

∘ Sólo se puntuarán aquellos apartados en que la solución esté **correctamente justificada**.
∘ No se permite el uso de documentación ni calculadora.
∘ El problema 2 se recogerá en 90 min. El problema 1 se recogerá 45 min. después.
∘ **Publicación de notas:** 01-02-13
∘ **Revisión de examen:** Se notifiicará durante el examen.

Examen tipo B

Problema 1 (3 p)
(Si se entrega este problema, su nota sustituirá a la del parcial. La nota por entrega de ejercicios no se verá afectada.)
Consideramos un sistema basado en las señales s_1 y s_2, reales y de la misma energía, con probabilidades P_1 y P_2.
(a) (1,5 p) Obtener una base ortonormal $\{\psi_1, \psi_2\}$ del espacio de señal aplicando el algoritmo de Gram-Schmidt a las señales $f_1 = s_1+s_2$, $f_2 = s_1-s_2$. Obtener las coordenadas de las señales s_1 y s_2 respecto de la base ortonormal obtenida en el apartado anterior. Utilizar la notación $\alpha = \|f_1\|$, $\beta = \|f_2\|$.
(b) (1,5 p) Se considera un receptor basado en los productos escalares $r_1 = \langle r, \psi_1\rangle$, $r_2 = \langle r, \psi_2\rangle$, siendo $r(t) = s_i(t) + n(t)$, donde $n(t)$ es ruido blanco gaussiano con densidad espectral de potencia $N_0/2$. Indicar las regiones de decisión. ¿Cuántos de estos productos son necesarios?

Problema 2 (7 p)
Partiendo de la constelación formada por las nueve señales de la forma

$$A\psi_1(t) + B\psi_2(t), A, B = -\alpha, 0, \alpha,$$

obtenemos una constelación de ocho señales equiprobables suprimiendo la señal con $A = \alpha, B = 0$.
(a) (1 p) Dibujar la constelación y las regiones de decisión.
(b) (1 p) Calcular la probabilidad de error de la señal con $A = -\alpha$, $B = 0$ en función de α.
(c) (1 p) Acotar, en función de α, la probabilidad de error de la señal con $A = \alpha$, $B = \alpha$.
(d) (1 p) Calcular el parámetro $\beta = \frac{d^2_{min}}{\mathcal{E}_{av}}$ de la constelación.
(e) (1 p) Acotar inferior y superiormente la energía por bit normalizada γ_b que garantiza una probabilidad de error P_E.
(f) (1 p) Calcular, utilizando como aproximaciones las cotas inferiores, el cociente entre la $\gamma_b = \gamma_{b1}$ que garantiza una cierta P_E para la modulación que estamos considerando y la $\gamma_b = \gamma_{b2}$ que garantiza la misma P_E para una modulación ortogonal del mismo número de señales.
(g) (1 p) Indicar para qué valores del parámetro $\tau > 0$ las señales $\psi_1 = \sqrt{\frac{1}{\tau}} I_{0,\tau}$, $\psi_2 = \sqrt{\frac{1}{\tau}} I_{T/2,(T/2)+\tau}$ constituyen un sistema ortonormal libre de IES para periodo de símbolo T.

Soluciones A

Problema 1

(a) Aplicando el algoritmo tenemos

$$\begin{aligned}
\psi_1 &= \frac{s_1+s_2}{\|s_1+s_2\|} = \frac{s_1+s_2}{\alpha} \\
\psi_2' &= s_1 - s_2 - \left\langle s_1 - s_2, \frac{s_1+s_2}{\alpha} \right\rangle \frac{s_1+s_2}{\alpha} = s_1 - s_2 \\
\psi_2' &= \frac{s_1-s_2}{\|s_1-s_2\|} = \frac{s_1-s_2}{\beta}.
\end{aligned}$$

De las relaciones

$$\alpha\psi_1 = s_1 + s_2, \quad \beta\psi_2 = s_1 - s_2,$$

sumándolas y restándolas y dividiendo entre dos obtenemos

$$\begin{aligned}
s_1 &= \frac{\alpha}{2}\psi_1 + \frac{\beta}{2}\psi_2, \\
s_2 &= \frac{\alpha}{2}\psi_1 - \frac{\beta}{2}\psi_2.
\end{aligned}$$

(b) La frontera entre las regiones de decisión en el plano (r_1, r_2) estará dada por

$$\begin{aligned}
&P_1 f(r_1, r_2|s_1) = P_2 f(r_1, r_2|s_2) \\
\Leftrightarrow &P_1 \exp - \frac{\left(r_1 - \frac{\alpha}{2}\right)^2 + \left(r_2 - \frac{\beta}{2}\right)^2}{2\sigma^2} = P_2 \exp - \frac{\left(r_1 - \frac{\alpha}{2}\right)^2 + \left(r_2 + \frac{\beta}{2}\right)^2}{2\sigma^2} \\
\Leftrightarrow &r_2 = -\frac{\sigma^2}{\beta} \log \frac{P_1}{P_2} \equiv r_0
\end{aligned}$$

donde $\sigma^2 = N_0/2$.

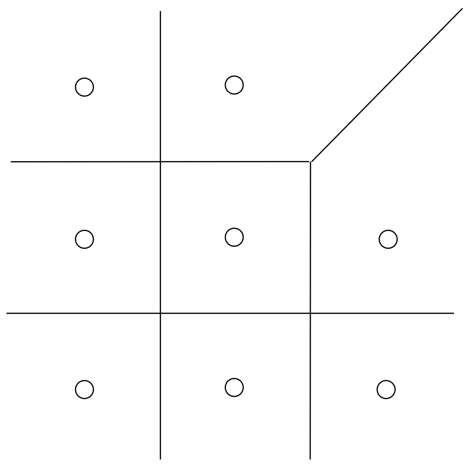
Como $f(r_1, r_2|s_1)$ tiene su máximo en $\left(\frac{\alpha}{2}, \frac{\beta}{2}\right)$, y $f(r_1, r_2|s_2)$ lo tiene en $\left(\frac{\alpha}{2}, -\frac{\beta}{2}\right)$, las regiones de decisión son

$$\begin{aligned}
R_1 &= \{(r_1, r_2) | r_2 > r_0\}, \\
R_2 &= \{(r_1, r_2) | r_2 < r_0\},
\end{aligned}$$

y como no dependen de r_1, este producto escalar no es necesario.

Problema 2

(a) Como las señales son equiprobables el criterio óptimo de decisión es el de mínima distancia, por lo que las fronteras de las regiones de decisión vienen dadas por las mediatrices de los segmentos que unen cada señal a las demás.



La distancia de cada señal a la frontera más cercana es $\alpha/2$.
(b) Tenemos

$$P_{E(-\alpha,0)} = 1 - P\left[n_1 < \frac{\alpha}{2}, |n_2| < \frac{\alpha}{2}\right] = 1 - \left(1 - Q\left(\frac{\alpha/2}{\sigma_n}\right)\right)\left(1 - 2Q\left(\frac{\alpha/2}{\sigma_n}\right)\right).$$

(c) La señal tiene dos vecinos a distancia α y uno a distancia $\sqrt{2}\alpha$, luego

$$P_{E(\alpha,0)} \geq Q\left(\frac{\alpha/2}{\sigma_n}\right),$$
$$P_{E(\alpha,0)} \leq 2Q\left(\frac{\alpha/2}{\sigma_n}\right) + Q\left(\frac{\sqrt{2}\alpha/2}{\sigma_n}\right) \leq 3Q\left(\frac{\alpha/2}{\sigma_n}\right).$$

(d) La energía media de la constelación vale

$$\mathcal{E}_{av} = \frac{1}{8}\left(4\alpha^2 + 3\cdot 2\alpha^2\right) = \frac{10}{8}\alpha^2 = \frac{5}{4}\alpha^2,$$

y como $d_{min} = \alpha$,

$$\beta = \frac{d_{min}^2}{\mathcal{E}_{av}} = \frac{\alpha^2}{\frac{5}{4}\alpha^2} = \frac{4}{5}.$$

(e) Como las señales son equiprobables y la distancia mínima de cada una a las demás es $d_{min,i} = d_{min}$, es válida la acotación

$$\frac{2}{\beta\log_2 M}\left[Q^{-1}\left(P_E\right)\right]^2 \leq \gamma_b \leq \frac{2}{\beta\log_2 M}\left[Q^{-1}\left(P_E/v_{max}\right)\right]^2,$$

donde $v_{max} = 4$ es el número máximo de vecinos de una señal, y

$$\frac{\beta}{2\log_2 M} = \frac{2}{(4/5)3} = \frac{5}{6}.$$

(f) En una modulación ortogonal el alfabeto de señales es

$$s_i(t) = A\psi_i(t),\ i = 1,\dots M,$$

donde $\{\psi_i\}_{i=1,\dots M}$ es un sistema ortonormal.

Como para ambas modulaciones $P_i =$ cte y $d_{min,i} = d_{min}$, podemos aproximar la γ_b por su cota inferior.

En el caso de la modulación ortogonal todas las señales tienen la misma energía, A^2, luego $\mathcal{E}_{av} = A^2$, y la distancia entre dos señales cualesquiera está dada por

$$d^2(s_i, s_j) = \langle A\psi_i - A\psi_j, A\psi_i - A\psi_j\rangle = 2A^2,$$

luego

$$\beta = \frac{2A^2}{A^2} = 2 \equiv \beta_2.$$

Denominando β_1 al parámetro β de nuestra modulación,

$$\frac{\gamma_{b1}}{\gamma_{b2}} \approx \frac{\frac{2}{\beta_1\log_2 M}\left[Q^{-1}(P_E)\right]^2}{\frac{2}{\beta_2\log_2 M}\left[Q^{-1}(P_E)\right]^2} = \frac{\beta_2}{\beta_1} = \frac{2}{4/5} = \frac{5}{2}.$$

(g) Las dos señales tienen energía unidad para todo $\tau > 0$. Por tanto, constituirán un sistema ortonormal si su producto escalar es 0, lo que ocurrirá, dado que son dos señales no negativas, cuando los intervalos en que son positivas no se solapen. Esto ocurre para $\tau \leq T/2$.

En este caso se tratará también de un sistema libre de IES para periodo de símbolo T, puesto que las señales

$$\psi_k(t - nT),\ k = 1, 2,\ n \in \mathbf{Z}$$

son ortogonales entre sí, dado que dos señales distintas no se solapan en el tiempo, como se comprueba al dibujarlas.

Soluciones B

Problema 1

(a) Aplicando el algoritmo tenemos

$$\psi_1 = \frac{s_1+s_2}{\|s_1+s_2\|} = \frac{s_1+s_2}{\alpha}$$
$$\psi_2' = s_1 - s_2 - \left\langle s_1-s_2, \frac{s_1+s_2}{\alpha}\right\rangle \frac{s_1+s_2}{\alpha} = s_1 - s_2$$
$$\psi_2' = \frac{s_1-s_2}{\|s_1-s_2\|} = \frac{s_1-s_2}{\beta}.$$

De las relaciones

$$\alpha\psi_1 = s_1+s_2, \quad \beta\psi_2 = s_1 - s_2,$$

sumándolas y restándolas y dividiendo entre dos obtenemos

$$s_1 = \frac{\alpha}{2}\psi_1 + \frac{\beta}{2}\psi_2,$$
$$s_2 = \frac{\alpha}{2}\psi_1 - \frac{\beta}{2}\psi_2.$$

(b) La frontera entre las regiones de decisión en el plano (r_1, r_2) estará dada por

$$P_1 f(r_1,r_2|s_1) = P_2 f(r_1,r_2|s_2)$$
$$\Leftrightarrow P_1 \exp -\frac{\left(r_1-\frac{\alpha}{2}\right)^2 + \left(r_2-\frac{\beta}{2}\right)^2}{2\sigma^2} = P_2 \exp -\frac{\left(r_1-\frac{\alpha}{2}\right)^2 + \left(r_2+\frac{\beta}{2}\right)^2}{2\sigma^2}$$
$$\Leftrightarrow r_2 = -\frac{\sigma^2}{\beta}\log\frac{P_1}{P_2} \equiv r_0$$

donde $\sigma^2 = N_0/2$.

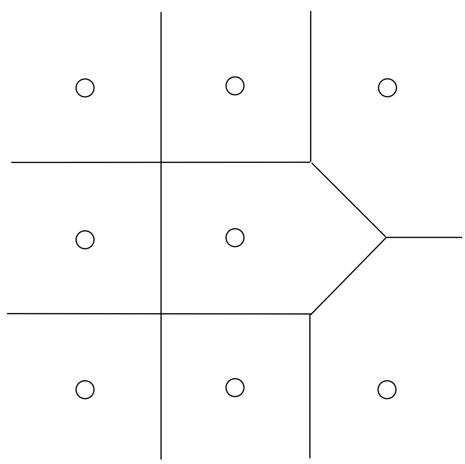
Como $f(r_1,r_2|s_1)$ tiene su máximo en $\left(\frac{\alpha}{2},\frac{\beta}{2}\right)$, y $f(r_1,r_2|s_2)$ lo tiene en $\left(\frac{\alpha}{2},-\frac{\beta}{2}\right)$, las regiones de decisión son

$$R_1 = \{(r_1,r_2)|r_2 > r_0\},$$
$$R_2 = \{(r_1,r_2)|r_2 < r_0\},$$

y como no dependen de r_1, este producto escalar no es necesario.

Problema 2

(a) Como las señales son equiprobables el criterio óptimo de decisión es el de mínima distancia, por lo que las fronteras de las regiones de decisión vienen dadas por las mediatrices de los segmentos que unen cada señal a las demás.



La distancia de cada señal a la frontera más cercana es $\alpha/2$.
(b) Tenemos

$$P_{E(-\alpha,0)} = 1 - P\left[n_1 < \frac{\alpha}{2}, |n_2| < \frac{\alpha}{2}\right] = 1 - \left(1 - Q\left(\frac{\alpha/2}{\sigma_n}\right)\right)\left(1 - 2Q\left(\frac{\alpha/2}{\sigma_n}\right)\right).$$

(c) La señal tiene una vecina a distancia α, otra a distancia $\sqrt{2}\alpha$ y una tercera a distancia 2α, luego

$$P_{E(\alpha,\alpha)} \geq Q\left(\frac{\alpha/2}{\sigma_n}\right),$$
$$P_{E(\alpha,\alpha)} \leq Q\left(\frac{\alpha/2}{\sigma_n}\right) + Q\left(\frac{\sqrt{2}\alpha/2}{\sigma_n}\right) + Q\left(\frac{\alpha}{\sigma_n}\right) \leq 3Q\left(\frac{\alpha/2}{\sigma_n}\right).$$

(d) La energía media de la constelación vale

$$\mathcal{E}_{av} = \frac{1}{8}\left(3\alpha^2 + 4\cdot 2\alpha^2\right) = \frac{11}{8}\alpha^2$$

y como $d_{min} = \alpha$,

$$\beta = \frac{d_{min}^2}{\mathcal{E}_{av}} = \frac{\alpha^2}{\frac{11}{8}\alpha^2} = \frac{8}{11}.$$

(e) Como las señales son equiprobables y la distancia mínima de cada una a las demás es $d_{min,i} = d_{min}$, es válida la acotación

$$\frac{2}{\beta\log_2 M}\left[Q^{-1}\left(P_E\right)\right]^2 \leq \gamma_b \leq \frac{2}{\beta\log_2 M}\left[Q^{-1}\left(P_E/v_{max}\right)\right]^2,$$

donde $v_{max} = 5$ es el número máximo de vecinos de una señal, y

$$\frac{\beta}{2\log_2 M} = \frac{2}{(8/11)3} = \frac{11}{12}.$$

(f) En una modulación ortogonal el alfabeto de señales es

$$s_i(t) = A\psi_i(t),\ i = 1,\ldots M,$$

donde $\{\psi_i\}_{i=1,\ldots M}$ es un sistema ortonormal.

Como para ambas modulaciones $P_i =$ cte y $d_{min,i} = d_{min}$, podemos aproximar la γ_b por su cota inferior.

En el caso de la modulación ortogonal todas las señales tienen la misma energía, A^2, luego $\mathcal{E}_{av} = A^2$, y la distancia entre dos señales cualesquiera está dada por

$$d^2(s_i, s_j) = \langle A\psi_i - A\psi_j, A\psi_i - A\psi_j\rangle = 2A^2,$$

luego

$$\beta = \frac{2A^2}{A^2} = 2 \equiv \beta_2.$$

Denominando β_1 al parámetro β de nuestra modulación,

$$\frac{\gamma_{b1}}{\gamma_{b2}} \approx \frac{\frac{2}{\beta_1\log_2 M}\left[Q^{-1}(P_E)\right]^2}{\frac{2}{\beta_2\log_2 M}\left[Q^{-1}(P_E)\right]^2} = \frac{\beta_2}{\beta_1} = \frac{2}{8/11} = \frac{11}{4}.$$

(g) Las dos señales tienen energía unidad para todo $\tau > 0$. Por tanto, constituirán un sistema ortonormal si su producto escalar es 0, lo que ocurrirá, dado que son dos señales no negativas, cuando los intervalos en que son positivas no se solapen. Esto ocurre para $\tau \leq T/2$.

En este caso se tratará también de un sistema libre de IES para periodo de símbolo T, puesto que las señales

$$\psi_k(t - nT),\ k = 1, 2,\ n \in \mathbf{Z}$$

son ortogonales entre sí, dado que dos señales distintas no se solapan en el tiempo, como se comprueba al dibujarlas.