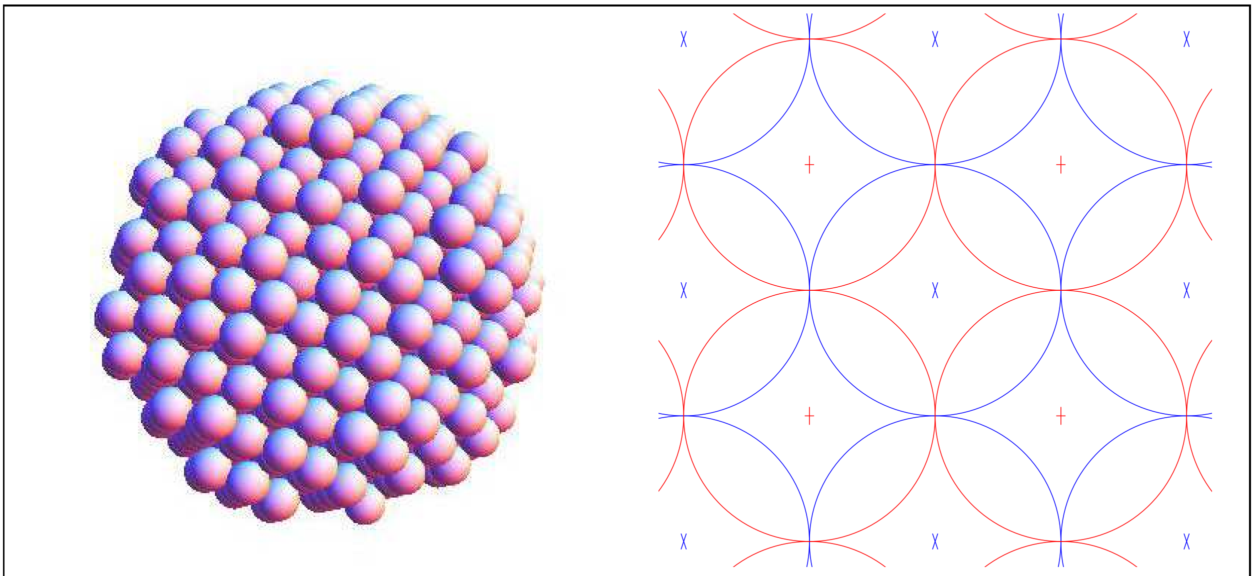
Departamento de Señales, Sistemas y Radicomunicaciones
Comunicaciones Digitales, junio 2011

○ Responder los problemas en hojas independientes.
○ No se permite el uso de calculadora.

Problema 1 (6 p.)
En este ejercicio se estudian los parámetros de calidad de constelaciones de gran número de señales dispuestas en puntos de una retícula regular con envoltura esférica centrada en el origen. **Los cálculos específicos para este tipo de constelaciones los daremos en el enunciado de forma que sólo se necesitará la teoría general que hemos visto para estudiar modulaciones.**

En todos los casos supondremos constelaciones de M símbolos equiprobables en las que que la distancia de cada señal a sus vecinas más próximas es igual a d. Suponemos que todas las regiones de decisión son iguales. Las constelaciones que vamos a comparar son:

- Unidimensional ocupando una longitud igual a $2R$.
- Bidimensional, con regiones de decisión hexagonales (área $2\sqrt{3}r^2$, donde r es el apotema) y envolvente circular (área πR^2).
- Tridimensional, con envolvente esférica (volumen $(4/3)\pi R^3$), como la que se ilustra en la figura adjunta. Cada esfera de una capa (circunferencias punteadas en la figura) descansan en el hueco que dejan cuatro esferas de la capa inferior (en línea sólida en la figura). En consecuencia, cada esfera es tangente a otras doce (cuatro en la capa inferior, cuatro en la superior y las cuatro adyacentes en su misma capa). Las regiones de decisión para este empaquetamiento tienen forma de dodecaedro rómbico (poliedro de 12 caras rombos idénticos). El volumen del dodecaedro rómbico es igual a $V = 4\sqrt{2}r^3$, donde r es el radio de una esfera inscrita en dicho poliedro tangente a todas sus caras.



(a) (b)

Notando por V_T el volumen de la bola L dimensional que contiene la constelación y por V_C el de las regiones decisión, tenemos $M \approx V_T/V_C$, y la energía media se aproxima por

$$\mathcal{E}_{av} = \frac{1}{M}\sum_i \|\mathbf{r}_i\|^2 = \frac{1}{V_T}\sum_i \|\mathbf{r}_i\|^2 V_C \approx \frac{1}{V(L,R)}\int_{B(0,R)} \mathbf{r}^2 d\mathbf{r} = \frac{\alpha_2(L,R)}{V(L,R)}.$$

donde $V_T = V(L,R)$ es el volumen de la bola L-dimensional de radio R y $\alpha_2(L,R)$ su momento de orden dos. Estos parámetros valen

$$\begin{array}{lll} V(1,R) = 2R, & V(2,R) = \pi R^2, & V(3,R) = \frac{4}{3}\pi R^3, \\ \alpha_2(1,R) = 2R^3/3, & \alpha_2(2,R) = \pi R^4/2, & \alpha_2(3,R) = 4\pi R^5/5. \end{array}$$

1. (4 p.) Expresar la energía media en función de d y M y calcular el valor de β para las tres constelaciones anteriores.

2. (2 p.) Calcular una cota superior de la probabilidad de error en función de d y de σ_n para las tres configuraciones.

Problema 2 (4 p.)
Se considera un sistema de transmisión digital basado en las señales equiprobables

$$s_i(t) = A_i\psi(t),\ \psi(t) = \frac{1}{\sqrt{T}} I_{0,T}(t),\ A_i = e^{j[(\pi/4)+(\pi/2)(i-1)]},\ i = 1, ..., 4$$

con $T = 1$. El canal de transmisión presenta propagación multitrayecto, de forma que las señales recibidas son de la forma

$$\hat{s}_i(t) + n(t),\ \hat{s}_i(t) = s_i(t) + \alpha e^{j\phi} s_i(t-\tau).$$

donde $n(t)$ es ruido blanco gaussiano complejo ($n(t) = n_c(t) + jn_s(t)$ con n_c y n_s ruido blanco gaussiano con densidad espectral de potencia bilateral N_0).
Suponemos que el receptor conoce las señales y los parámetros del canal $\alpha = 1/4$, $\phi = \pi/2$, $\tau = T/4$ (constantes). La decisión se basa en un filtro con respuesta al impulso $\psi^*(-t)$ cuya salida se muestrea en el instante $t = 0$. Denominando $X = X_c + jX_s$ a la muestra a la salida del filtro
(a) (1.5 p) Indicar los elementos del problema de estimación bayesiana correspondiente a la determinación de la señal transmitida s_i a partir de la observación (X_c, X_s).
(b) (1.5 p) Representar gráficamente las regiones de decisión óptimas,
(c) (1 p) Dar una expresión de la probabilidad de error en términos de la función Q si las regiones de decisión estuvieran fueran las delimitadas por los ejes de ordenadas.

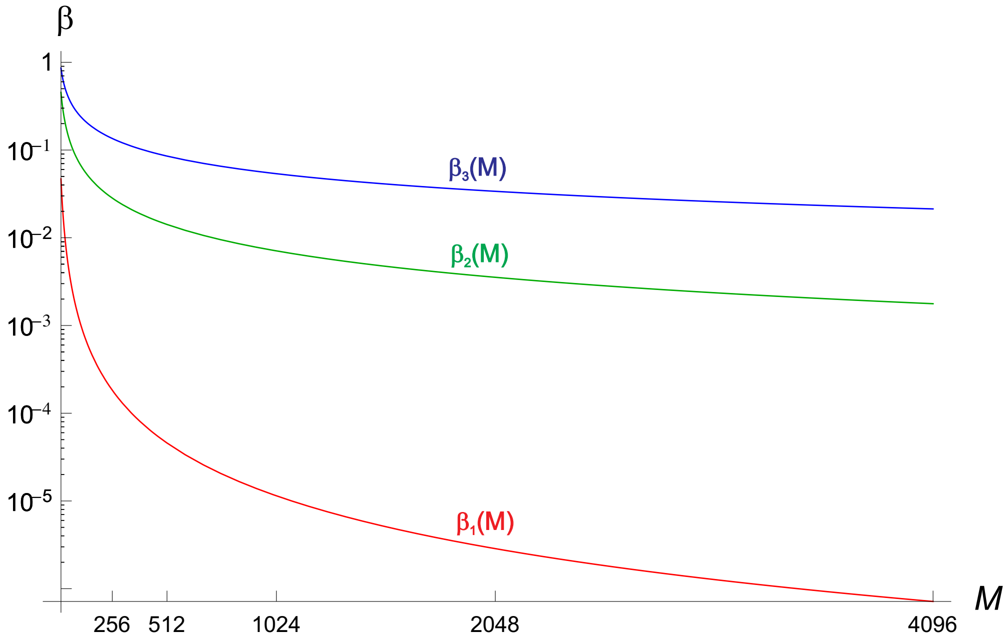
Soluciones

1. - Para $L = 1$ es $2R \approx Md$ y en consecuencia
$$\mathcal{E}_{av,1} \approx \frac{R^2}{3} = \frac{M^2}{4 \cdot 3} d^2$$
con lo que
$$\beta_1 = \frac{d^2}{\mathcal{E}_{av,1}} \approx \frac{12}{M^2}$$
   - Para $L = 2$
$$\mathcal{E}_{av,2} \approx \frac{\pi R^4/2}{\pi R^2} = \frac{R^2}{2}$$
El area del hexágono es de calculo inmediato: Si S es la superficie, a el apotema y l el lado del hexágono, $S = 6a \cdot l/2$, y puesto que $\tan \frac{\pi}{6} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{l/2}{a}$ resulta $S = 3a\frac{2}{\sqrt{3}}a = 2\sqrt{3}a^2$.
La distancia entre señales adyacentes es el doble del apotema, esto es, $d = 2a$, por lo que
$$S = 2\sqrt{3}a^2 = \frac{\sqrt{3}}{2} d^2$$
por lo que
$$\pi R^2 \approx M \frac{\sqrt{3}}{2} d^2$$
Substituyendo el valor de R^2:
$$\mathcal{E}_{av,2} \approx \frac{R^2}{2} = M \frac{\sqrt{3}}{4\pi} d^2$$
de donde
$$\beta_2 = \frac{d^2}{\mathcal{E}_{av,2}} \approx \frac{4\pi}{M\sqrt{3}}$$
   - Para $L = 3$
$$\mathcal{E}_{av,3} \approx \frac{4\pi R^5/5}{\frac{4}{3}\pi R^3} = \frac{3R^2}{5}$$
La distancia entre las señales correspondientes a dos regiones de decisión adyacentes es igual a dos veces el radio de cada esfera, por lo que el volumen de la región de decisión es
$$V_C(3) = 4\sqrt{2}\left(\frac{d}{2}\right)^3 = \frac{\sqrt{2}}{2} d^3$$
Como en los casos anteriores:
$$\frac{4}{3}\pi R^3 \approx M \frac{\sqrt{2}}{2} d^3$$
luego
$$R \approx \frac{\left(3M\sqrt{2}\right)^{\frac{1}{3}}}{2\pi^{\frac{1}{3}}}$$
y
$$\mathcal{E}_{av,3} \approx= \frac{3R^2}{5} = \frac{3}{5}\frac{\left(3M\sqrt{2}\right)^{\frac{2}{3}}}{2 \cdot 2\pi^{\frac{2}{3}}} = \frac{3}{10}\left(\frac{3M}{2\pi}\right)^{\frac{2}{3}}$$

con lo que

$$\beta_3 = \frac{d^2}{\mathcal{E}_{av,2}} \approx \frac{10}{3}\left(\frac{2\pi}{3M}\right)^{\frac{2}{3}}$$

En la figura adjunta se representan los valores de β en funcion de M para las tres constelaciones. La ventaja de incrementar la dimensión se hace evidente para valores elevados de M (numero de señales).



2. Como sabemos,

$$Q\left(\frac{d_{min,i}}{2\sigma_n}\right) \leq P_{e,i} \leq \sum_{j\in V_i} Q\left(\frac{d_{j,i}}{2\sigma_n}\right) \leq v_i \cdot Q\left(\frac{d_{min,i}}{2\sigma_n}\right)$$

donde V_i es el conjunto de señales vecinas y v_i el número de elementos de V_i. En nuestro caso, y despreciando la periferia de las constelaciones, todas las señales tiene la misma probabilidad de error y todas las señales vecinas (2 en en caso unidimensional, 6 en el bidimensional y 12 en el tridimensional) se encuentran a la misma distancia (d) por lo que las cotas pedidas son:

$$P_e \leq v_i \cdot Q\left(\frac{d}{2\sigma_n}\right)$$

$$P_{e,1D} \leq 2 \cdot Q\left(\frac{d}{2\sigma_n}\right) \quad P_{e,2D} \leq 6 \cdot Q\left(\frac{d}{2\sigma_n}\right) \quad P_{e,3D} \leq 12 \cdot Q\left(\frac{d}{2\sigma_n}\right)$$

Problema 2

(a) El problema de estimación bayesiana consiste en estimar el valor de la incógnita s_i, $i = 1, \ldots, 4$, con probabilidades a priori $P_i = 1/4$ en base a la observación (X_c, X_s), cuya fdp condicional vamos a calcular. Si se transmite s_i tenemos

$$\begin{aligned} X = X_c + jX_s &= \langle \hat{s}_i(t) + n(t), \psi(t)\rangle = \left\langle A_i(\psi(t) + \alpha e^{j\phi}\psi(t-\tau)) + n(t), \psi(t)\right\rangle \\ &= A_i(1 + \alpha e^{j\phi}\rho) + n_{1c} + jn_{1s} = A_i\left(1 + j\frac{3}{16}\right) + n_{1c} + jn_{1s}, \end{aligned}$$

puesto que $\rho = \langle \psi(t-\tau), \psi(t)\rangle = \dfrac{3}{4}$.

Como $n_{1c} + jn_{1s}$ es el producto escalar de la señal de ruido blanco gaussiano complejo $n(t)$ con una señal de energía unidad, $\psi(t)$, n_{1c} y n_{1s} son gaussianas independientes de media nula y varianza $\sigma_n^2 = N_0$, luego X_c y X_s con gaussianas independientes de varianza σ_n y medias, respectivamente, la parte real y la parte imaginaria de $A_i(1 + \alpha e^{j\phi}\rho)$.

(b) Al ser las señales equiprobables, las regiones de decisión están dadas por el criterio de mínima distancia, y por tanto sus fronteras están delimitadas por las mediatrices de los segmentos que unen las señales vecinas. En este caso las fronteras corresponden a los ejes girados.

(c) La probabilidad de error es la misma para cualquier señal. Si el vector de medias de la observación cuando se transmite s_1 es (μ_1, μ_2), tenemos

$$P_E = P_{E1} = 1 - P(n_{1c} > -\mu_1)P(n_{2c} > -\mu_2) = 1 - (1 - Q(\mu_1/\sigma_n))(1 - Q(\mu_2/\sigma_n)).$$