Departamento de Señales, Sistemas y Radicomunicaciones
Comunicaciones Digitales, Septiembre 2011

◦ Responder los problemas en hojas independientes.
◦ No se permite el uso de documentación ni calculadora.
◦ Tiempo: 2 horas.
◦ **Publicación de notas:** 20 de septiembre
◦ **Revisión de examen:** 23 de septiembre, 15:30, C-301 (no es necesario apuntarse previamente).

Examen tipo A

Problema 1 (5 p.)
El transmisor de cierto sistema de comunicaciones digitales emite señales de la forma:

$$\tilde{s}_n(t) = (a - d \cdot t)\cos(\omega t)\,\mathrm{I}_{0,1}(t) - (b + c \cdot t)\,\mathrm{sen}\,(\omega t)\,\mathrm{I}_{0,1}(t)$$

donde $a, b, c, d \in \{\pm 2A, \pm A\}$. Dichas señales pueden interpretarse como la modulación DBLC de ciertas señales complejas $s_n(t)$.
1. (1 p) Encontrar la expresión de $s_n(t)$. ¿Cuál es la dimensión del conjunto $\{s_n(t)\}$?
Independientemente del resultado encontrado supondremos en lo sucesivo que la señal $s_n(t)$ puede escribirse como

$$s_n(t) = (a + b\boldsymbol{j})\Phi_1(t) + (c + d\boldsymbol{j})\Phi_2(t)$$

donde $\Phi_1 = \boldsymbol{j}\mathrm{I}_{0,1}(t)$, $\Phi_2 = (1 - \boldsymbol{j}t)\,\mathrm{I}_{0,1}(t)$ y $a, b, c, d \in \{\pm 2A, \pm A\}$.
2. (2 p) Encontrar una base ortonormal para este conjunto de señales empleando el método de Gram Schmidt y partiendo de Φ_1.
3. (1 p) Representar el receptor óptimo para símbolos aislados basado en filtro adaptados.
4. (1 p) ¿Está este sistema libre de IES ?

Problema 2 (5 p.)
Se consideran las siguientes modulaciones de señales equiprobables basadas en el sistema ortonormal $\{\psi_k\}_{k=1,2,3}$:
Modulación A: Formada por las señales de la forma

$$s_i(t) = A_i\psi_1(t) + B_i\psi_2(t) + C_i\psi_3(t)$$

donde los vectores $\mathrm{s}_i = (A_i, B_i, C_i)$ son todas las combinaciones de coeficientes de valores $\pm 1, \pm 3$.
Modulación B: La que se obtiene de la anterior suprimiendo las 32 señales con mayor energía.
Se pide:
1. (1,5 p) Calcular la energía media de la modulación A. Calcular su parámetro de calidad $\beta \log_2 M$ y su eficacia espectral η.
2. (1 p) Representar gráficamente la modulación B.
3. (1,5 p) Calcular la energía media de la modulación B. Calcular su parámetro de calidad $\beta \log_2 M$ y su eficacia espectral η.
4. (1 p) Si en un sistema sustituimos la modulación A por la modulación B, ¿qué porcentaje de energía por bit ahorramos? ¿Por qué factor se nos multiplica el ancho de banda mínimo necesario (sin IES)? (suponer probabilidad de error fija baja).

Soluciones

Problema 1

1. Debería ser
$$\begin{aligned}\tilde{s}_n(t) &= \mathrm{Re}\left[s_n(t)e^{\boldsymbol{j}\omega t}\right] = \mathrm{Re}\left[\left(s_{nc}\left(t\right)+\boldsymbol{j}s_{ns}\left(t\right)\right)\left(\cos\left(\omega t\right)+\boldsymbol{j}\,\mathrm{sen}\left(\omega t\right)\right)\right] =\\ &= s_{nc}\left(t\right)\cos\left(\omega t\right) - s_{ns}\left(t\right)\mathrm{sen}\left(\omega t\right) =\\ &= \left(a-d\cdot t\right)\cos\left(\omega t\right)\mathrm{I}_{0,1}\left(t\right) - \left(b+c\cdot t\right)\mathrm{sen}\left(\omega t\right)\mathrm{I}_{0,1}\left(t\right)\end{aligned}$$

   e identificando los términos que multiplican a $\mathrm{sen}\left(\omega t\right)$ y $\cos\left(\omega t\right)$ resulta
$$s_{nc}\left(t\right) = \left(a-d\cdot t\right)\mathrm{I}_{0,1}\left(t\right) \qquad s_{ns}\left(t\right) = \left(b+c\cdot t\right)\mathrm{I}_{0,1}\left(t\right)$$

   de donde
$$\begin{aligned}s_n\left(t\right) &= \left(a-d\cdot t\right)\mathrm{I}_{0,1}\left(t\right) + \left(b+c\cdot t\right)\mathrm{I}_{0,1}\left(t\right)\boldsymbol{j} =\\ &= \left(a+b\boldsymbol{j}\right)\mathrm{I}_{0,1}\left(t\right) + \left(c\cdot t\boldsymbol{j} - d\cdot t\right)\mathrm{I}_{0,1}\left(t\right) =\\ &= \left(a+b\boldsymbol{j}\right)\mathrm{I}_{0,1}\left(t\right) + \left(c+d\boldsymbol{j}\right)t\,\mathrm{I}_{0,1}\left(t\right)\end{aligned}$$

   Puesto que las señales $\mathrm{I}_{0,1}\left(t\right)$ y $t\,\mathrm{I}_{0,1}\left(t\right)$ no son combinación lineal una de otra y cualquier señal del conjunto $\{s_n\}$ puede construirse como una combinación lineal de ambas (eso sí, con coeficientes complejos), la dimensión es 2.

2.
$$\varphi_1\left(t\right) = \frac{\Phi_1\left(t\right)}{\|\Phi_1\left(t\right)\|}$$
$$\|\Phi_1\left(t\right)\|^2 dt = \int_{-\infty}^{\infty}\Phi_1\left(t\right)\cdot\Phi_1^*\left(t\right)dt = \int_0^1 \boldsymbol{j}\cdot\left(-\boldsymbol{j}\right)dt = 1$$
$$\varphi_1\left(t\right) = \Phi_1\left(t\right) = \boldsymbol{j}\mathrm{I}_{0,1}\left(t\right)$$

$$\Phi_2 = \alpha\varphi_1 + \Phi_{2n} \qquad \langle\Phi_2,\varphi_1\rangle = \alpha\langle\varphi_1,\varphi_1\rangle + \langle\Phi_{2n},\varphi_1\rangle$$
$$\begin{aligned}\alpha = \langle\Phi_2,\varphi_1\rangle &= \int_{-\infty}^{\infty}\Phi_2\left(t\right)\cdot\varphi_1^*\left(t\right)dt = \int_0^1\left(1-\boldsymbol{j}t\right)\left(-\boldsymbol{j}\right)dt =\\ &= \int_0^1 -\boldsymbol{j}dt + \int_0^1 \boldsymbol{j}^2 t\,dt = -\frac{1}{2}-\boldsymbol{j}\end{aligned}$$

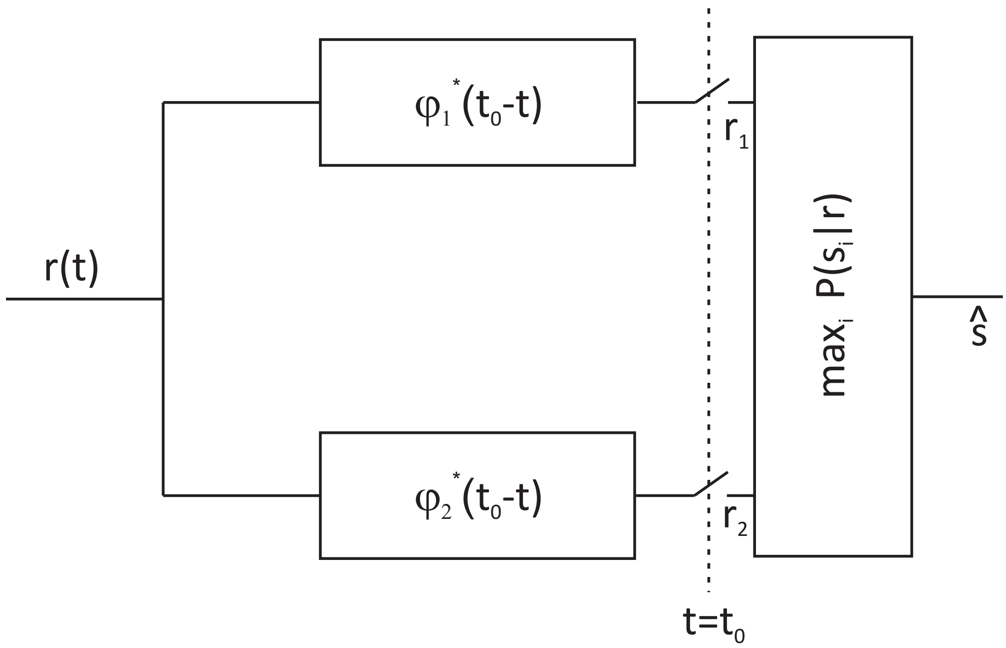
   luego
$$\begin{aligned}\Phi_{2n}\left(t\right) &= \Phi_2\left(t\right) - \left(-\frac{1}{2}-\boldsymbol{j}\right)\varphi_1\left(t\right) = \left[\left(1-\boldsymbol{j}t\right)+\left(\frac{1}{2}+\boldsymbol{j}\right)\boldsymbol{j}\right]\mathrm{I}_{0,1}\left(t\right) =\\ &= \left(1-\boldsymbol{j}t+\frac{1}{2}\boldsymbol{j}+\boldsymbol{j}^2\right)\mathrm{I}_{0,1}\left(t\right) = \left(\frac{1}{2}-t\right)\boldsymbol{j}\,\mathrm{I}_{0,1}\left(t\right) =\end{aligned}$$

   y puesto que
$$\begin{aligned}\|\Phi_{2n}\left(t\right)\|^2 dt &= \int_{-\infty}^{\infty}\left|\left(\frac{1}{2}-t\right)\boldsymbol{j}\,\mathrm{I}_{0,1}\left(t\right)\right|^2 dt = \int_0^1\left(\frac{1}{4}+t^2-t\right)dt =\\ &= \left[\frac{1}{4}t-\frac{1}{2}t^2+\frac{1}{3}t^3\right]_0^1 = \frac{1}{12}\end{aligned}$$

resulta

$$\varphi_2(t) = \frac{\Phi_{2n}(t)}{1/\sqrt{12}} = 2\sqrt{3}\left(\frac{1}{2} - t\right) \boldsymbol{j}\, \mathrm{I}_{0,1}(t) = \sqrt{3}(1-2t)\, \boldsymbol{j}\, \mathrm{I}_{0,1}(t)$$

3. El receptor óptimo para símbolos aislados basado en filtros adaptados se representa en la figura adjunta:



4. Para que el sistema esté libre de interferencias entre símbolos debe verificarse

$$\langle \varphi_i(t-nT), \varphi_j(t-mT)\rangle = \delta_{ij}\delta[n-m]$$

$\varphi_i(t-nT)$ sólo es distinta de cero en el intervalo $[nT,(n+1)T]$, por lo que si $n \neq m$, resulta $\varphi_i(t-nT)\cdot(\varphi_j(t-mT))^* = 0$ para todo[1] t.

Cuando $n = m$, $\langle \varphi_i(t-nT), \varphi_j(t-nT)\rangle = \delta_{ij}$ por ser la base ortonormal, con lo que el sistema está libre de interferencia entre símbolos[2]

[1] excepto quizás en algún punto (extremo del intervalo), pero por la definición de distancia que utilizamos no tiene ninguna trascendencia

[2] $\int_{-\infty}^{\infty} \varphi_i(t-nT)\cdot(\varphi_j(t-nT))^*\,dt = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_i(u)\cdot(\varphi_j(u))^*\,du$ como es inmediato comprobar mediante la transformación $u = t - nT$.

Problema 2

(a) La energía media de la modulación A se calcula fácilmente, como en el caso de QAM, como la suma de las energías medias de cada coeficiente:

$$\mathcal{E}_{av,A} = 3\frac{1^2+3^2}{2}c^2 = 15c^2.$$

La distancia mínima es la que hay entre dos señales cuyas coordenadas sólo difieran en un coeficiente, es decir, $2c$, luego

$$\beta_A = \frac{d^2_{min}}{\mathcal{E}_{av}} = \frac{4c^2}{15c^2} = \frac{4}{15}$$

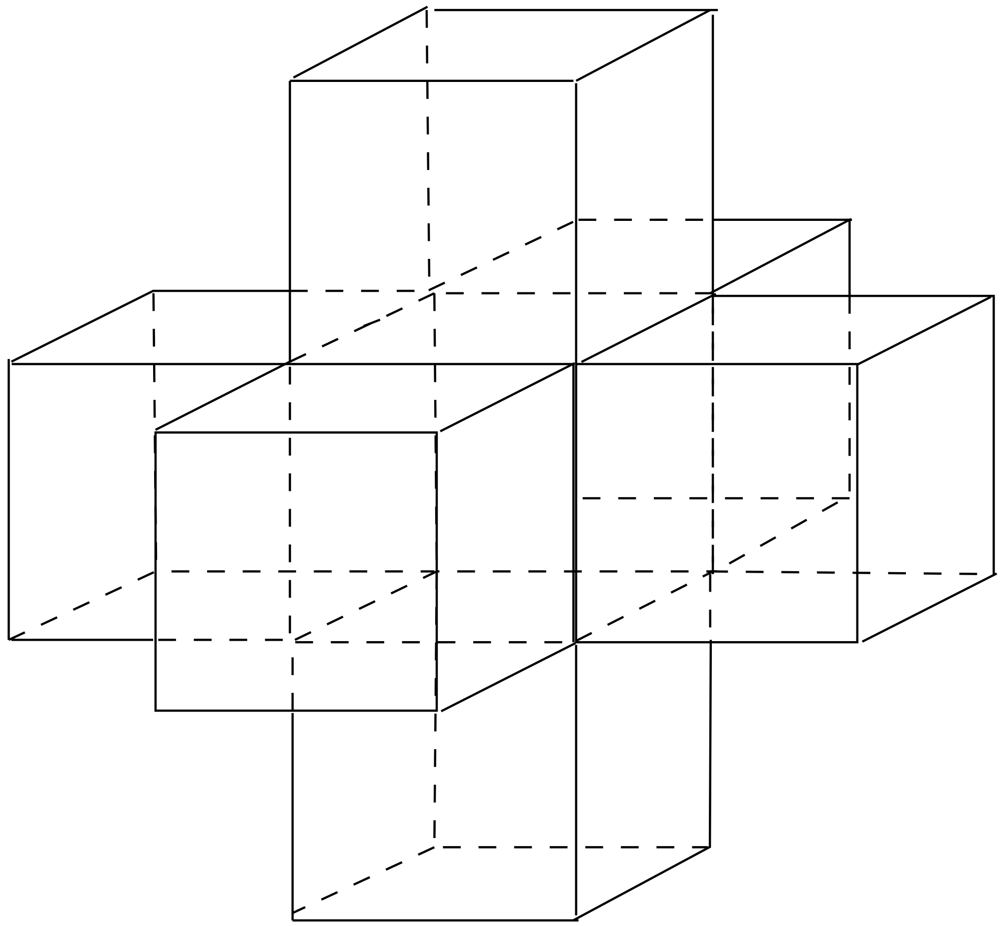
$$\beta_A \log_2 M_A = \beta \log_2 64 = \frac{4}{15}6 = \frac{8}{5}.$$

La eficacia espectral vale

$$\eta_A = \frac{R}{W} = \frac{\log_2 M/T}{L/(2T)} = 2\frac{\log_2 M}{L} = 2\frac{6}{3} = 4.$$

(b) Las señales de mayor energía de la modulación A son las ocho señales con coeficientes con valor absoluto dos. Después de éstas, las 24 señales con dos coeficientes de valor absoluto tres.

Las señales estarían situadas en los vértices de la figura, con el origen de coordenadas en el centro del cubo central.



(c) Tenemos ocho señales de energía $3\cdot 1^2c^2 = 3c^2$ y 24 señales de energía $(3^2+2\cdot 1^2)c^2 = 11c^2$, luego la energía media de la modulación resultante es:

$$\mathcal{E}_{av,B} = \frac{8\cdot 3 + 24\cdot 11}{32}c^2 = 9c^2$$

La distancia mínima entre señales sigue siendo $2c$ luego

$$\beta_B = \frac{4c^2}{9c^2} = \frac{4}{9}$$
$$\beta_B \log_2 M_B = \frac{4}{9}5 = \frac{20}{9}.$$

La eficacia espectral vale
$$\eta_B = 2\frac{\log_2 M}{L} = 2\frac{5}{3} = \frac{10}{3}.$$

(d) Dado que las señales son equiprobables y la distancia mínima es igual para todas las señales, podemos usar la aproximación para probabilidades de error pequeñas,

$$\gamma_b \approx \frac{2}{\beta \log_2 M} Q^{-1}(P_E)^2,$$

luego
$$\frac{\gamma_{b,B}}{\gamma_{b,A}} \approx \frac{\beta_A \log_2 M_A}{\beta_B \log_2 M_B} = \frac{8/5}{20/9} = \frac{18}{25},$$

con lo que el porcentaje que ahoramos es

$$100\left(1 - \frac{18}{25}\right) = 100\frac{7}{25} = 28\,\%,$$

mientras que el ancho de banda mínimo se multiplica por

$$\frac{W_B}{W_A} = \frac{R/\eta_B}{R/\eta_A} = \frac{\eta_A}{\eta_B} = \frac{4}{10/3} = \frac{6}{5}.$$