Departamento de Señales, Sistemas y Radicomunicaciones
Comunicaciones Digitales, septiembre 2012

- ○ Responder los problemas en hojas independientes.
- ○ No se permite el uso de documentación ni calculadora.
- ○ Tiempo: 2 horas.
- ○ **Publicación de notas:** 18-09-12
- ○ **Revisión de examen:** 20-09-12, 18:30, C-301 (no es necesario apuntarse previamente).

Examen tipo A

Problema 1 (5 p.)
1. (1.0 p) Si $\{\varphi_i(t)\}$ es un conjunto ortonormal, ¿cómo son las señales $f_i(t) = \varphi_i(t/T)$?
En adelante puede ser útil saber que el conjunto $\psi_{mn}(t) = \sqrt{2}\sin(2\pi mt + n\pi/2)I_{0,1}(t)$, donde $m \in \mathbf{N}$, $m > 0$, $n = 0, 1$, es un sistema ortonormal.
Consideramos un sistema de comunicaciones digitales basado en la señales equiprobables

$$s_{mn}(t) = A\sin\left(\frac{2\pi mt}{T} + n\frac{\pi}{2}\right) I_{0,T}(t)$$

donde $m = 1, 2$, $n = 0, 1$.
2. (1.0 p) ¿Qué energía tienen estas señales? ¿Son ortogonales entre si?
3. (2.0 p) Si se recibe $r(t) = s_{mn}(t) + n(t) = B\left[I_{0,T/4}(t) - I_{T/4,3T/4}(t) + I_{3T/4,T}(t)\right]$, donde $n(t)$ es ruido blanco gaussiano, ¿cuál es la señal transmitida más probable? Sugerencia: Dibujar las señales.
4. (1.0 p) Suponiendo que recibimos la señal $r(t) = I_{0,T}$, calcular el cociente de probabilidades a posteriori $P[s_{1,0}|r]/P[s_{1,1}|r]$.

Problema 2 (5 p.)
Se considera la constelación de señales: $s_i(t) = (A_{ic} + \boldsymbol{j} A_{is})\,\psi(t)$ donde $\|\psi\| = 1$ y

$$A_{ic} \in \{\pm a \cdot (2p - 1), p = 1, \ldots, M/2\}$$
$$A_{is} \in \{\pm b \cdot (2q - 1), q = 1, \ldots, N/2\}$$

que modula en DBLC una portadora de frecuencia f_c.
1. (0.5 p) Represente de forma aproximada la constelación para $M = 4$, $N = 6$ y $b = 2a$.
2. (0.5 p) ¿Cuál es la dimensión de la modulación?
3. (1.5 p) Calcular la probabilidad de error para esta constelación, con N,M,a y b arbitrarios, sabiendo que para una constelación PAM de N señales en la que la distancia entre señales adyacentes es d, la probabilidad de error es $P_{e,PAM} = \frac{2N-2}{N} Q\left(\frac{d}{2\sigma_n}\right)$.
4. (1.0 p) Sabiendo que la energía media de la constelación es

$$E_{av} = \frac{1}{3}\left(a^2\left(M^2 - 1\right) + b^2\left(N^2 - 1\right)\right)$$

¿Cual es el valor de β?
Se pretende construir un sistema de transmisión empleando esta modulación y un receptor óptimo basado en filtros adaptados donde T el periodo de símbolo,

$$\psi(t) = A\,\mathrm{sinc}\left(\frac{t - 2T}{T}\right) \cdot I_{0,4T}(t)$$

y A es el valor necesario para que $\|\psi(t)\| = 1$.
5. (1.5 p) ¿Está libre de interferencia entre símbolos este sistema de transmisión? Es imprescindible que demuestre su respuesta. Sugerencia: dibuje $\psi(t)$.

Soluciones A

Problema 1

1. Calculamos los productos escalares de las señales del nuevo conjunto:

$$\langle f_i, f_j \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} f_i(t) f_j^*(t)dt = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_i(t/T)\varphi_j^*(t/T)dt = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_i(t')\varphi_j^*(t')T dt' = T \langle \varphi_i, \varphi_j \rangle \, .$$

Por tanto las señales $f_i(t)$ son ortogonales entre sí y de energía T.

Resultado sin justificar, 0.
Si se incluye el cálculo correcto del producto escalar de señales distintas, 0,5.
Si se incluye el cálculo correcto de la energía de cada señal, 0,5.

---

2. Tenemos $s_{mn}(t) = \frac{A}{\sqrt{2}}\psi_{mn}(t/T)$. Usando el apartado 1, tenemos

$$\begin{aligned} \langle s_{mn}, s_{kl} \rangle &= \left\langle \frac{A}{\sqrt{2}}\psi_{mn}(t/T), \frac{A}{\sqrt{2}}\psi_{kl}(t/T) \right\rangle \\ &= \left\langle \frac{A}{\sqrt{2}}\psi_{mn}(t/T), \frac{A}{\sqrt{2}}\psi_{kl}(t/T) \right\rangle = \frac{|A|^2}{2} \langle \psi_{mn}(t/T), \psi_{kl}(t/T) \rangle \\ &= \frac{|A|^2}{2} T \langle \psi_{mn}(t), \psi_{kl}(t) \rangle \, . \end{aligned}$$

Por tanto las señales son ortogonales entre sí y de energía $\frac{|A|^2}{2}T$.

Resultado sin justificar, 0.
Si se incluye el cálculo correcto del producto escalar de señales distintas, 0,5.
Si se incluye el cálculo correcto de la energía de cada señal, 0,5.

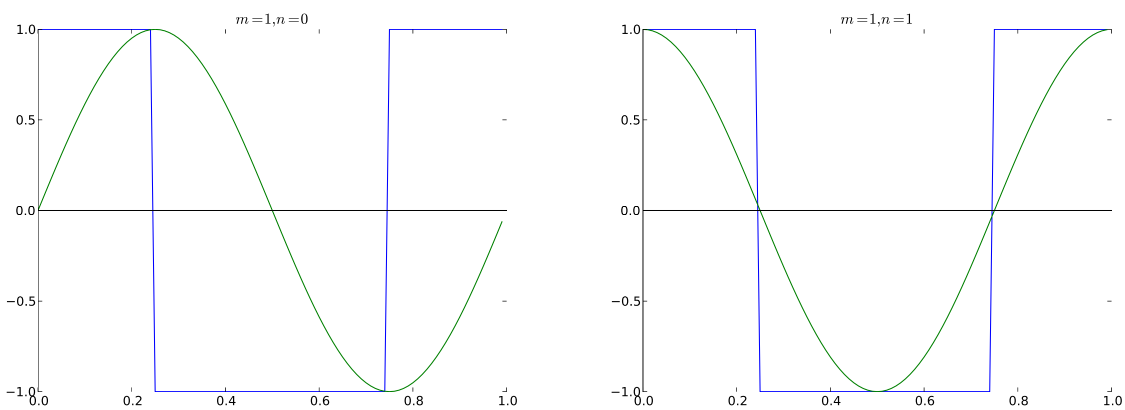
---

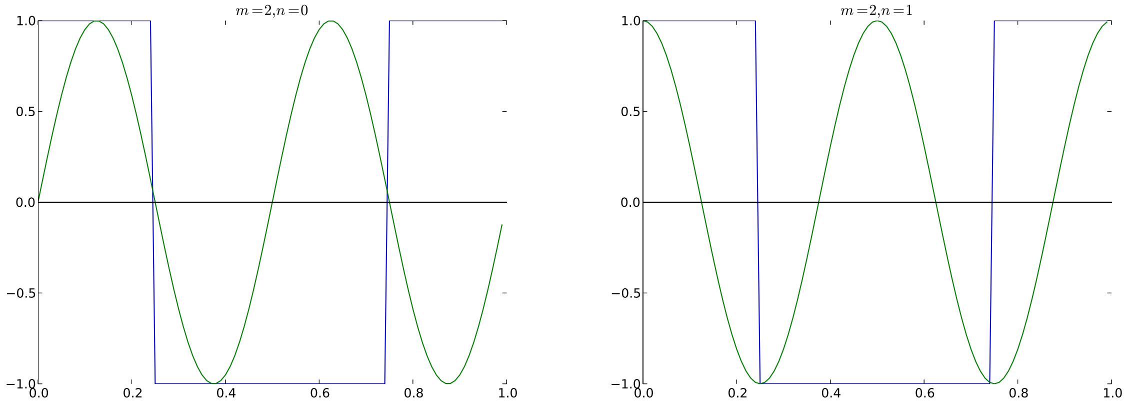
3. Por ser las señales de la misma energía, la señal más probable a posteriori será la que maximice la parte real del producto escalar con la señal recibida. Aunque se admite considerar únicamente el caso real y suponer $A > 0$, $B > 0$, lo hacemos de forma general. Estos productos valen

$$\langle s_{mn}, r \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} A s_{mn,A=1}(t) B^* r_{B=1}^*(t) dt = AB^* \int_{-\infty}^{\infty} s_{mn,A=1}(t) r_{B=1}(t) dt.$$

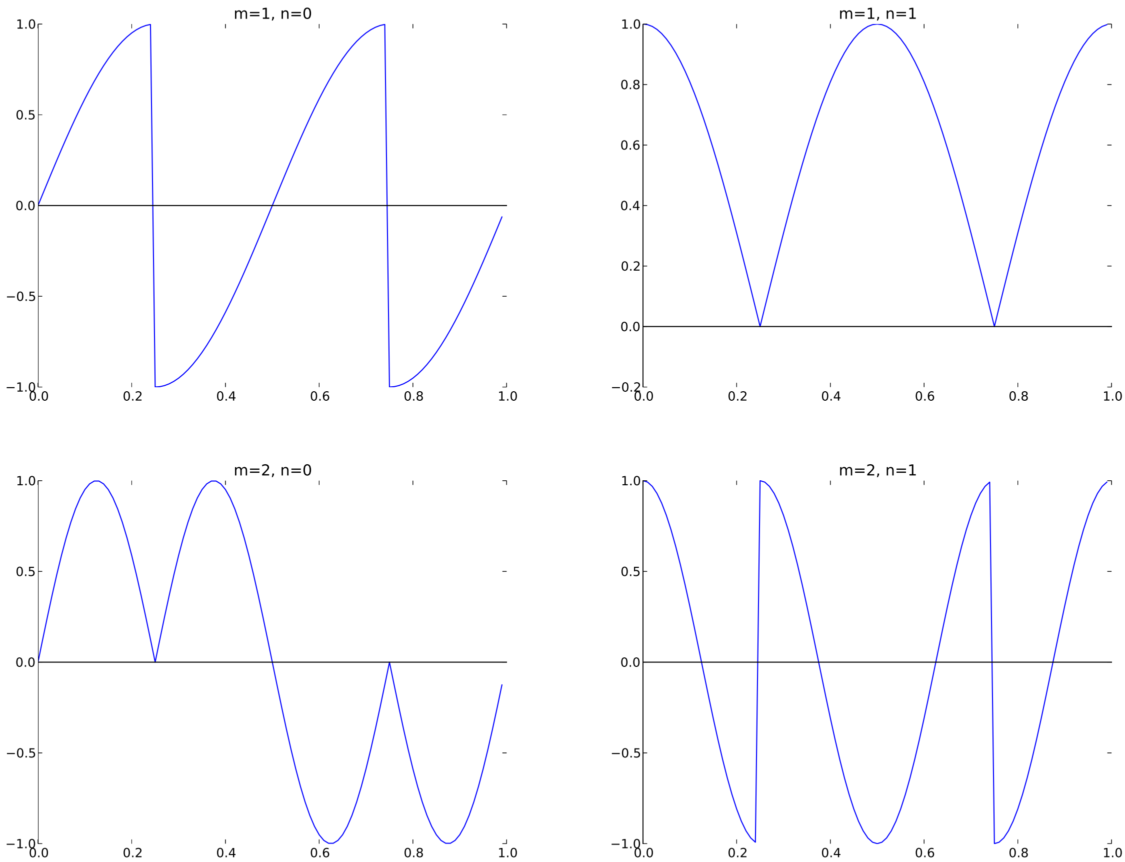
Dibujando las señales y los productos $s_{mn,A=1}(t)r_{B=1}(t)$ se observa que todas las integrales valen cero, menos el producto con $s_{1,1}$, que es positivo.

Señales de la constelación $s_{mn}(t)$ y señal recibida $r(t)$ para $A = B = 1$.





Señales producto $s_{mn}(t)r(t)$ para $A = B = 1$.



Como la señal más probable será la que maximice

$$\Re \langle s_{mn}, r \rangle = \Re(AB^*) \int_{-\infty}^{\infty} s_{mn,A=1}(t) r_{B=1}(t) dt,$$

tenemos que, si $\Re(AB^*) > 0$, la señal indicada es la más probable a posteriori, mientras que si $\Re(AB) = 0$ todas son igualmente probables y si $\Re(AB) < 0$ ésta es la menos probable, y las demás tienen la misma probabilidad).

Resultado sin justificar, 0.
Razonamiento incorrecto (por ejemplo, “la señal más probable es ésta porque es la que más se parece a la recibida”), aunque el resultado coincida con el correcto, 0.
Razonamiento correcto pero con errores de cálculo no graves, 1.

---

4. Notamos por r las coordenadas de la proyección de $r(t)$ sobre el espacio de señal

en términos de una base ortonormal cualquiera y por $\mathbf{s}_{ij}$ las coordenadas de la señal $s_{ij}(t)$ respecto de esta base. El cociente pedido vale

$$\frac{P[s_{1,0}|r]}{P[s_{1,1}|r]} = \frac{P[s_{1,0}]f(\mathbf{r}|s_{1,0})/f(\mathbf{r})}{P[s_{1,1}]f(\mathbf{r}|s_{1,1})/f(\mathbf{r})} = \frac{f(\mathbf{r}|s_{1,0})}{f(\mathbf{r}|s_{1,1})} = \frac{\exp -\frac{\|\mathbf{s}_{1,0}-\mathbf{r}\|^2}{2\sigma^2}}{\exp -\frac{\|\mathbf{s}_{1,0}-\mathbf{r}\|^2}{2\sigma^2}}$$

$$= \exp -\frac{\|\mathbf{s}_{1,0}-\mathbf{r}\|^2 - \|\mathbf{s}_{1,1}-\mathbf{r}\|^2}{2\sigma^2}$$

$$= \exp -\frac{\|\mathbf{s}_{1,0}\|^2 + \|\mathbf{r}\|^2 - 2\langle \mathbf{r}, \mathbf{s}_{1,0}\rangle - \|\mathbf{s}_{1,1}\|^2 - \|\mathbf{r}\|^2 + 2\langle \mathbf{r}, \mathbf{s}_{1,1}\rangle}{2\sigma^2}$$

$$= \exp -\frac{\langle \mathbf{r}, \mathbf{s}_{1,1}\rangle - \langle \mathbf{r}, \mathbf{s}_{1,0}\rangle}{\sigma^2} = \exp -\frac{\langle r, s_{1,1}\rangle - \langle r, s_{1,0}\rangle}{\sigma^2}$$

$$= \exp -\frac{\int_0^1 s_{1,1}(t)dt - \int_0^1 s_{1,0}(t)dt}{\sigma^2} = \exp -\frac{0-0}{\sigma^2} = \exp 0 = 1.$$

Resultado sin justificar, 0.
Razonamiento incorrecto, aunque el resultado coincida con el correcto, 0.
Razonamiento correcto pero con errores de cálculo no graves, 0.5.

Problema 2

1. Ver figura adjunta.

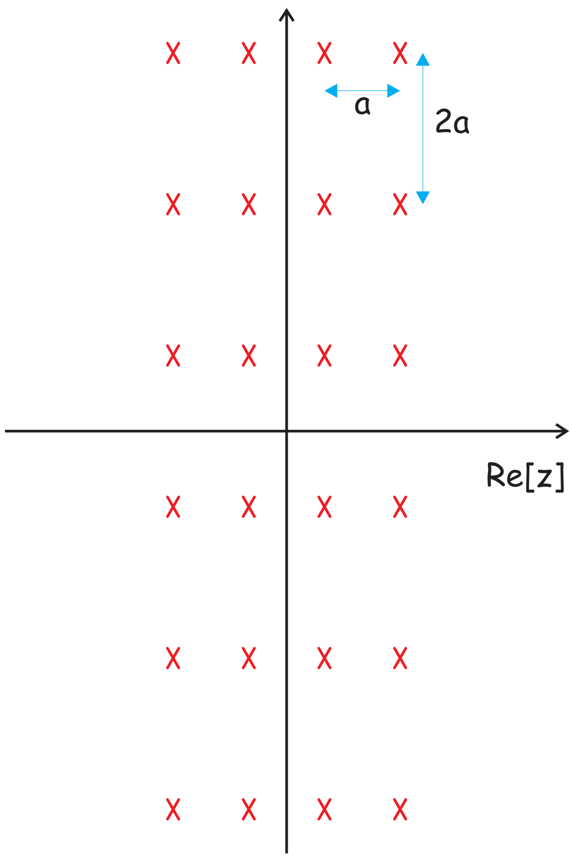


Figura 1: Apartado 1

2. Las señales son de la forma, $A\psi(t)$, con $A = A_{ic} + \boldsymbol{j} A_{is}$, luego la dimensión es 1.

3. Siguiendo el mismo procedimiento que se utilizó en clase al hablar de QAM, la probabilidad de acierto es el producto de la probabilidad de acierto en filas:

$$P_{A,PAM,f} = 1 - \frac{2M-2}{M} Q\left(\frac{a}{\sigma_n}\right)$$

y la probabilidad de acierto en columnas:

$$P_{A,PAM,c} = 1 - \frac{2N-2}{N} Q\left(\frac{b}{\sigma_n}\right)$$

luego

$$P_A = \left(1 - \frac{2M-2}{M} Q\left(\frac{a}{\sigma_n}\right)\right) \cdot \left(1 - \frac{2N-2}{N} Q\left(\frac{b}{\sigma_n}\right)\right)$$

y

$$P_e = 1 - P_A = 1 - \left(1 - \frac{2M-2}{M} Q\left(\frac{a}{\sigma_n}\right)\right) \cdot \left(1 - \frac{2N-2}{N} Q\left(\frac{b}{\sigma_n}\right)\right)$$

$$\begin{aligned} P_e =& \frac{2M-2}{M} Q\left(\frac{a}{\sigma_n}\right) + \frac{2N-2}{N} Q\left(\frac{b}{\sigma_n}\right) - \\ & - \frac{(2M-2)(2M-2)}{MN} Q\left(\frac{a}{\sigma_n}\right) \cdot Q\left(\frac{b}{\sigma_n}\right) \end{aligned}$$

Otra forma de resolver este apartado es aplicar:

$$P_e = 1 - P_a \quad P_a = \sum_i P_{a,i} P_i = \frac{1}{N \cdot M} \sum_i P_{a,i}$$

Llamando $p = Q(a/\sigma_n)$ y $q = Q(b/\sigma_n)$, y analizando los diferentes tipos de regiones que existen, la probabilidad de acierto para cada region es:

Tipo región	Num. regiones	Prob. acierto	Prob. Error
Esquinas	4	$(1-p)\cdot(1-q)$	$p+q-pq$
inferior	$M-2$	$(1-2p)\cdot(1-q)$	$2p+q-2pq$
superior	$M-2$	$(1-2p)\cdot(1-q)$	$2p+q-2pq$
izquierda	$N-2$	$(1-p)\cdot(1-2q)$	$p+2q-2pq$
derecha	$N-2$	$(1-p)\cdot(1-2q)$	$p+2q-2pq$
internas	$(M-2)\cdot(N-2)$	$(1-2p)\cdot(1-2q)$	$2p+2q-4pq$

De donde

$$\begin{aligned} P_e &= 1 - \frac{MN + 2Np - 2MNp + 2Mq - 2MNq + 4pq - 4Mpq - 4Npq + 4MNpq}{MN} = \\ &= -\frac{2Np - 2MNp}{NM} - \frac{2Mq - 2MNq}{NM} - \frac{4pq - 4Mpq - 4Npq + 4MNpq}{MN} = \\ &= -\frac{2-2M}{M} p - \frac{2-2N}{N} q - \frac{4 - 4M - 4N + 4MN}{MN} pq = \\ &= \frac{2M-2}{M} Q\left(\frac{a}{\sigma_n}\right) + \frac{2N-2}{N} Q\left(\frac{b}{\sigma_n}\right) - \frac{(2M-2)(2N-2)}{MN} Q\left(\frac{a}{\sigma_n}\right) Q\left(\frac{b}{\sigma_n}\right) \end{aligned}$$

4.

$$\beta = \frac{d_{min}^2}{E_{av}} = \frac{\left(2\,\text{mín}\,(a,b)\right)^2}{\frac{1}{3}\left(b^2\left(N^2-1\right)+a^2\left(M^2-1\right)\right)} = \\ = \frac{12\left(\text{mín}\,(a,b)\right)^2}{\left(b^2\left(N^2-1\right)+a^2\left(M^2-1\right)\right)} =$$

Si $M = N$ y $a = b$ entonces $\beta = \dfrac{12}{2\left(M^2-1\right)}$ (QAM).

5. Intuitivamente parece que debe haber interferencia entre símbolos. Demostrarlo a partir del calculo de $x(t)$ o $X(f)$ parece complejo. Es mucho más fácil intentar demostrar que $\langle\psi(t), \psi(t-nT)\rangle \neq \delta[n]$ y para ello basta encontrar un valor de $k \neq 0$ tal que $\langle\psi(t), \psi(t-kT)\rangle \neq 0$.

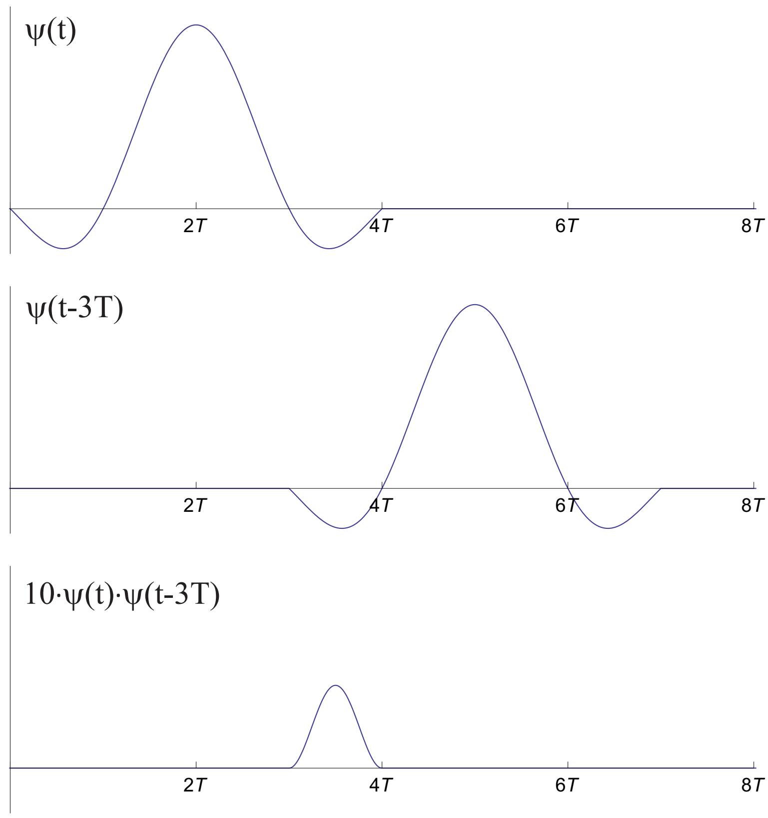


Figura 2: Cálculo de $\langle\psi\,(t)\,, \psi\,(t-3T)\rangle$

Para evitar la realización de integrales, podemos utilizar el valor $k = 2$ ó $k = 3$ (ver figura 4 adjunta). Resulta $\psi(t)\psi(t-3T) > 0$ en el intervalo $(3T, 4T)$ y cero fuera de ese intervalo, por lo que

$$\langle\psi\,(t)\,, \psi\,(t-3T)\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \psi(t)\cdot\psi^*(t-3T)\cdot dt = \\ = \int_{-\infty}^{\infty} \psi(t)\cdot\psi(t-3T)\cdot dt > 0 \neq \delta[3] = 0$$

porque el integrando tiene signo constante y es distinto de cero en un intervalo de longitud no nula. En consecuencia existirá IES.

Departamento de Señales, Sistemas y Radicomunicaciones
Comunicaciones Digitales, septiembre 2012

∘ Responder los problemas en hojas independientes.
∘ No se permite el uso de documentación ni calculadora.
∘ Tiempo: 2 horas.
∘ **Publicación de notas:** 18-09-12
∘ **Revisión de examen:** 20-09-12, 18:30, C-301 (no es necesario apuntarse previamente).

Examen tipo B

Problema 1 (5 p.)
1. (1.0 p) Si $\{\varphi_i(t)\}$ es un conjunto ortonormal, ¿cómo son las señales $f_i(t) = \varphi_i(t/T)$?
En adelante puede ser útil saber que el conjunto $\psi_{mn}(t) = \sqrt{2}\sin(2\pi mt + n\pi/2)I_{0,1}(t)$, donde $m \in \mathbf{N}$, $m > 0$, $n = 0, 1$, es un sistema ortonormal.
Consideramos un sistema de comunicaciones digitales basado en la señales equiprobables

$$s_{mn}(t) = A\sin\left(\frac{2\pi mt}{T} + n\frac{\pi}{2}\right) I_{0,T}(t)$$

donde $m = 1, 2$, $n = 0, 1$.
2. (1.0 p) ¿Qué energía tienen estas señales? ¿Son ortogonales entre si?
3. (2.0 p) Si se recibe $r(t) = s_{mn}(t)+n(t) = B\left[I_{0,T/4}(t) - I_{T/4,T/2}(t) + I_{T/2,3T/4}(t) - I_{3T/4,T}(t)\right]$, donde $n(t)$ es ruido blanco gaussiano, ¿cuál es la señal transmitida más probable? Sugerencia: Dibujar las señales.
4. (1.0 p) Suponiendo que recibimos la señal $r(t) = I_{0,T}$, calcular el cociente de probabilidades a posteriori $P[s_{1,0}|r]/P[s_{1,1}|r]$.

Problema 2 (5 p.)
Se considera la constelación de señales: $s_i(t) = (A_{ic} + \boldsymbol{j} A_{is})\,\psi(t)$ donde $\|\psi\| = 1$ y

$$A_{ic} \in \{\pm a \cdot (2p-1)\,, p = 1, \ldots, M/2\}$$

$$A_{is} \in \{\pm b \cdot (2q-1)\,, q = 1, \ldots, N/2\}$$

que modula en DBLC una portadora de frecuencia f_c.
1. (0.5 p) Represente de forma aproximada la constelación para $M = 4$, $N = 6$ y $a = 2b$.
2. (0.5 p) ¿Cuál es la dimensión de la modulación?
3. (1.5 p) Calcular la probabilidad de error para esta constelación, con N,M,a y b arbitrarios, sabiendo que para una constelación PAM de N señales en la que la distancia entre señales adyacentes es d, la probabilidad de error es $P_{e,PAM} = \frac{2N-2}{N}Q\left(\frac{d}{2\sigma_n}\right)$.
4. (1.0 p) Sabiendo que la energía media de la constelación es

$$E_{av} = \frac{1}{3}\left(a^2\left(M^2-1\right) + b^2\left(N^2-1\right)\right)$$

¿Cual es el valor de β?
Se pretende construir un sistema de transmisión empleando esta modulación y un receptor óptimo basado en filtros adaptados donde T el periodo de símbolo,

$$\psi(t) = A\,\mathrm{sinc}\left(\frac{t-2T}{T}\right) \cdot I_{0,4T}(t)$$

y A es el valor necesario para que $\|\psi(t)\| = 1$.
5. (1.5 p) ¿Está libre de interferencia entre símbolos este sistema de transmisión? Es imprescindible que demuestre su respuesta. Sugerencia: dibuje $\psi(t)$.

Soluciones B

Problema 1

1. Calculamos los productos escalares de las señales del nuevo conjunto:

$$\langle f_i, f_j \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} f_i(t) f_j^*(t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_i(t/T)\varphi_j^*(t/T) dt = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_i(t')\varphi_j^*(t') T dt' = T \langle \varphi_i, \varphi_j \rangle .$$

Por tanto las señales $f_i(t)$ son ortogonales entre sí y de energía T.

Resultado sin justificar, 0.
Si se incluye el cálculo correcto del producto escalar de señales distintas, 0,5.
Si se incluye el cálculo correcto de la energía de cada señal, 0,5.

---

2. Tenemos $s_{mn}(t) = \frac{A}{\sqrt{2}}\psi_{mn}(t/T)$. Usando el apartado 1, tenemos

$$\begin{aligned}\langle s_{mn}, s_{kl} \rangle &= \left\langle \frac{A}{\sqrt{2}}\psi_{mn}(t/T), \frac{A}{\sqrt{2}}\psi_{kl}(t/T) \right\rangle \\ &= \left\langle \frac{A}{\sqrt{2}}\psi_{mn}(t/T), \frac{A}{\sqrt{2}}\psi_{kl}(t/T) \right\rangle = \frac{|A|^2}{2} \langle \psi_{mn}(t/T), \psi_{kl}(t/T) \rangle \\ &= \frac{|A|^2}{2} T \langle \psi_{mn}(t), \psi_{kl}(t) \rangle .\end{aligned}$$

Por tanto las señales son ortogonales entre sí y de energía $\frac{|A|^2}{2}T$.

Resultado sin justificar, 0.
Si se incluye el cálculo correcto del producto escalar de señales distintas, 0,5.
Si se incluye el cálculo correcto de la energía de cada señal, 0,5.

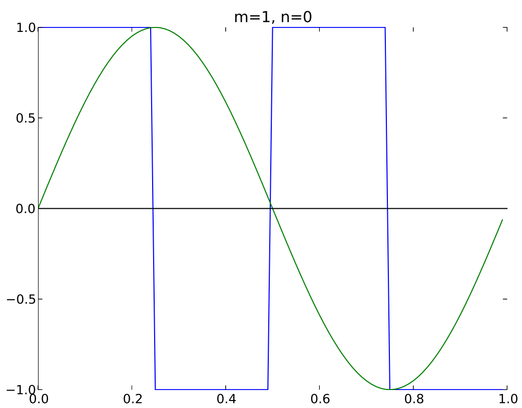
---

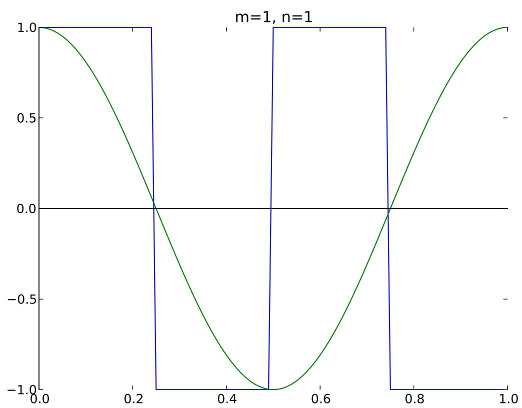
3. Por ser las señales de la misma energía, la señal más probable a posteriori será la que maximice la parte real del producto escalar con la señal recibida. Aunque se admite considerar únicamente el caso real y suponer $A > 0$, $B > 0$, lo hacemos de forma general. Estos productos valen

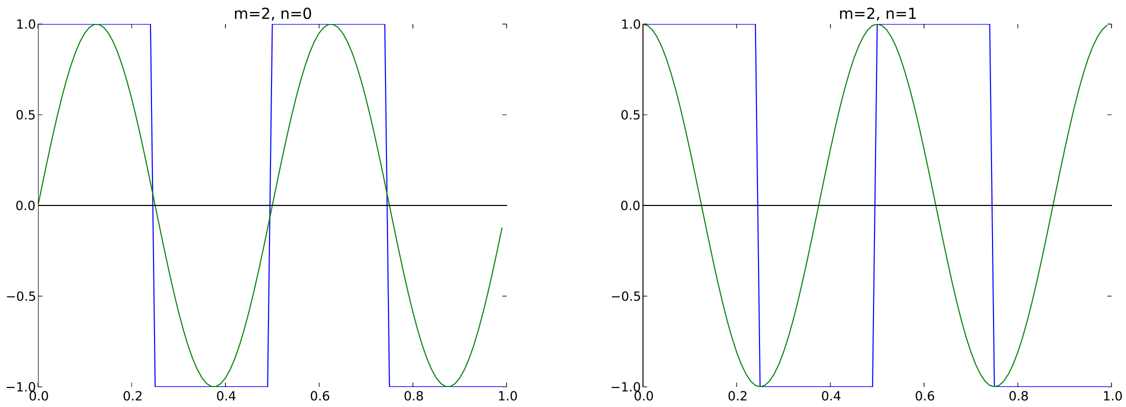
$$\langle s_{mn}, r \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} A s_{mn,A=1}(t) B^* r_{B=1}^*(t) dt = AB^* \int_{-\infty}^{\infty} s_{mn,A=1}(t) r_{B=1}(t) dt.$$

Dibujando las señales y los productos $s_{mn,A=1}(t) r_{B=1}(t)$ se observa que todas las integrales valen cero, menos el producto con $s_{2,0}$, que es positivo.

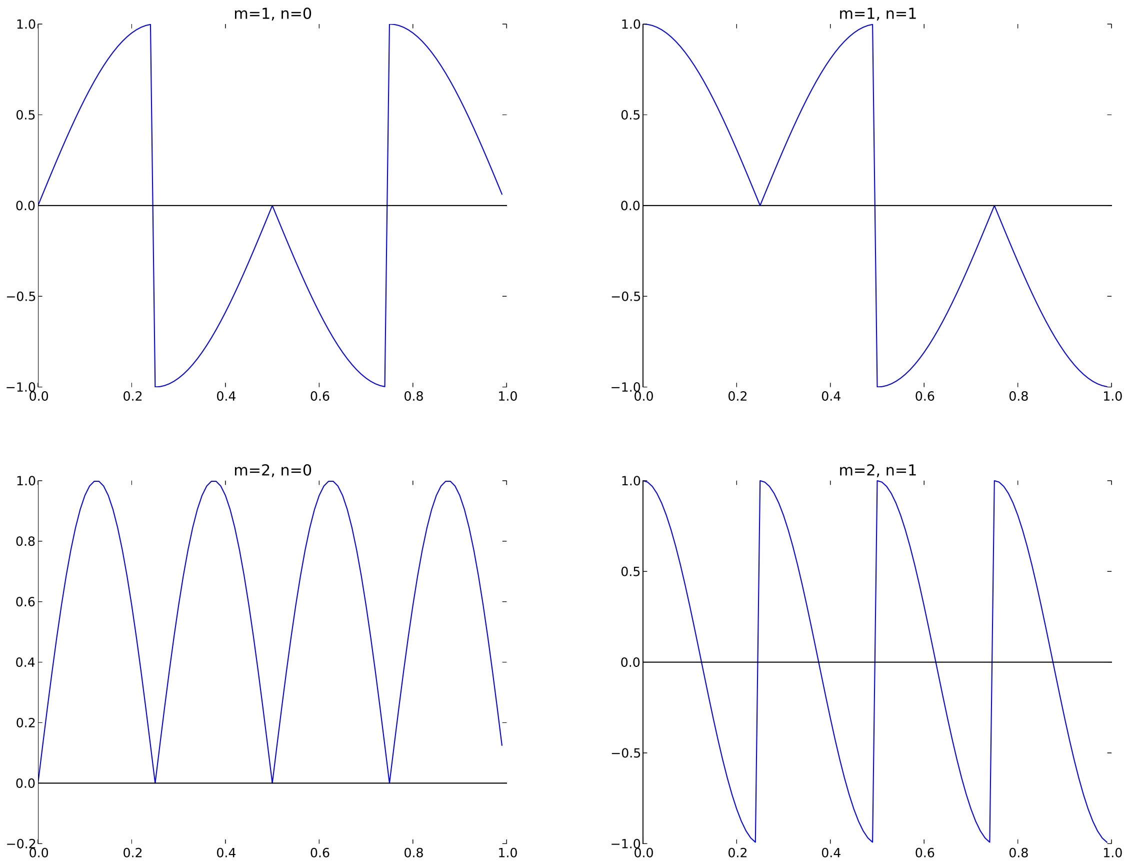
Señales de la constelación $s_{mn}(t)$ y señal recibida $r(t)$ para $A = B = 1$.







Señales producto $s_{mn}(t)r(t)$ para $A = B = 1$.



Como la señal más probable será la que maximice

$$\Re \langle s_{mn}, r \rangle = \Re(AB^*) \int_{-\infty}^{\infty} s_{mn,A=1}(t) r_{B=1}(t) dt,$$

tenemos que, si $\Re(AB^*) > 0$, la señal indicada es la más probable a posteriori, mientras que si $\Re(AB) = 0$ todas son igualmente probables y si $\Re(AB) < 0$ ésta es la menos probable, y las demás tienen la misma probabilidad).

Resultado sin justificar, 0.
Razonamiento incorrecto (por ejemplo, "la señal más probable es ésta porque es la que más se parece a la recibida"), aunque el resultado coincida con el correcto, 0.
Razonamiento correcto pero con errores de cálculo no graves, 1.

---

4. Notamos por r las coordenadas de la proyección de $r(t)$ sobre el espacio de señal

en términos de una base ortonormal cualquiera y por $\mathbf{s}_{ij}$ las coordenadas de la señal $s_{ij}(t)$ respecto de esta base. El cociente pedido vale

$$\begin{aligned}
\frac{P[s_{1,0}|r]}{P[s_{1,1}|r]} &= \frac{P[s_{1,0}]f(\mathbf{r}|s_{1,0})/f(\mathbf{r})}{P[s_{1,1}]f(\mathbf{r}|s_{1,1})/f(\mathbf{r})} = \frac{f(\mathbf{r}|s_{1,0})}{f(\mathbf{r}|s_{1,1})} = \frac{\exp -\frac{\|\mathbf{s}_{1,0}-\mathbf{r}\|^2}{2\sigma^2}}{\exp -\frac{\|\mathbf{s}_{1,0}-\mathbf{r}\|^2}{2\sigma^2}} \\
&= \exp -\frac{\|\mathbf{s}_{1,0}-\mathbf{r}\|^2 - \|\mathbf{s}_{1,1}-\mathbf{r}\|^2}{2\sigma^2} \\
&= \exp -\frac{\|\mathbf{s}_{1,0}\|^2 + \|\mathbf{r}\|^2 - 2\langle \mathbf{r}, \mathbf{s}_{1,0}\rangle - \|\mathbf{s}_{1,1}\|^2 - \|\mathbf{r}\|^2 + 2\langle \mathbf{r}, \mathbf{s}_{1,1}\rangle}{2\sigma^2} \\
&= \exp -\frac{\langle \mathbf{r}, \mathbf{s}_{1,1}\rangle - \langle \mathbf{r}, \mathbf{s}_{1,0}\rangle}{\sigma^2} = \exp -\frac{\langle r, s_{1,1}\rangle - \langle r, s_{1,0}\rangle}{\sigma^2} \\
&= \exp -\frac{\int_0^1 s_{1,1}(t)dt - \int_0^1 s_{1,0}(t)dt}{\sigma^2} = \exp -\frac{0-0}{\sigma^2} = \exp 0 = 1.
\end{aligned}$$

Resultado sin justificar, 0.
Razonamiento incorrecto, aunque el resultado coincida con el correcto, 0.
Razonamiento correcto pero con errores de cálculo no graves, 0.5.

Problema 2

1. Ver figura adjunta.

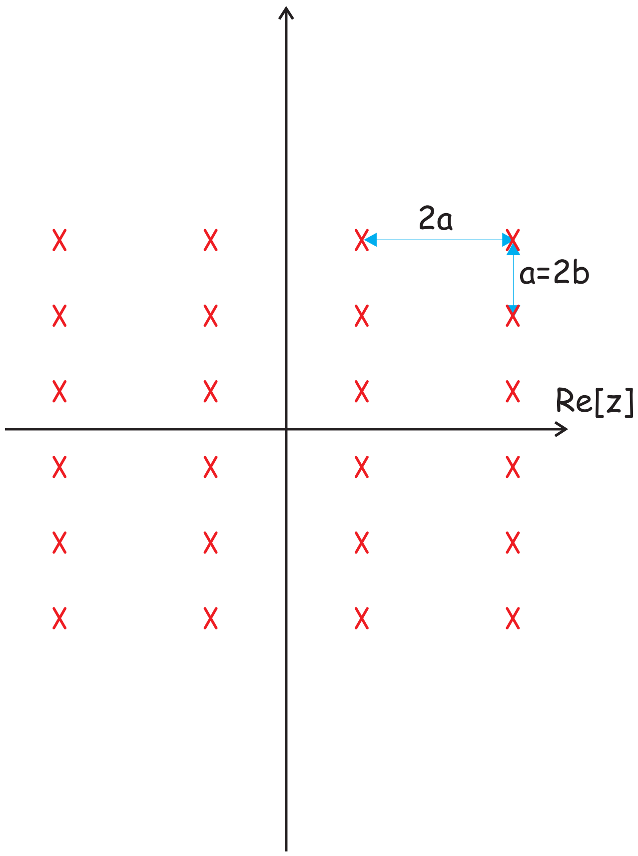


Figura 3: Apartado 1

2. Las señales son de la forma, $A\psi(t)$, con $A = A_{ic} + \boldsymbol{j}A_{is}$, luego la dimensión es 1.

3. Siguiendo el mismo procedimiento que se utilizó en clase al hablar de QAM, la probabilidad de acierto es el producto de la probabilidad de acierto en filas:

$$P_{A,PAM,f} = 1 - \frac{2M-2}{M} Q\left(\frac{a}{\sigma_n}\right)$$

y la probabilidad de acierto en columnas:

$$P_{A,PAM,c} = 1 - \frac{2N-2}{N} Q\left(\frac{b}{\sigma_n}\right)$$

luego

$$P_A = \left(1 - \frac{2M-2}{M} Q\left(\frac{a}{\sigma_n}\right)\right) \cdot \left(1 - \frac{2N-2}{N} Q\left(\frac{b}{\sigma_n}\right)\right)$$

y

$$P_e = 1 - P_A = 1 - \left(1 - \frac{2M-2}{M} Q\left(\frac{a}{\sigma_n}\right)\right) \cdot \left(1 - \frac{2N-2}{N} Q\left(\frac{b}{\sigma_n}\right)\right)$$

$$\begin{aligned} P_e =& \frac{2M-2}{M} Q\left(\frac{a}{\sigma_n}\right) + \frac{2N-2}{N} Q\left(\frac{b}{\sigma_n}\right) - \\ & - \frac{(2M-2)(2M-2)}{MN} Q\left(\frac{a}{\sigma_n}\right) \cdot Q\left(\frac{b}{\sigma_n}\right) \end{aligned}$$

Otra forma de resolver este apartado es aplicar:

$$P_e = 1 - P_a \quad P_a = \sum_i P_{a,i} P_i = \frac{1}{N \cdot M} \sum_i P_{a,i}$$

Llamando $p = Q(a/\sigma_n)$ y $q = Q(b/\sigma_n)$, y analizando los diferentes tipos de regiones que existen, la probabilidad de acierto para cada region es:

Tipo región	Num. regiones	Prob. acierto	Prob. Error
Esquinas	4	$(1-p)\cdot(1-q)$	$p+q-pq$
inferior	$M-2$	$(1-2p)\cdot(1-q)$	$2p+q-2pq$
superior	$M-2$	$(1-2p)\cdot(1-q)$	$2p+q-2pq$
izquierda	$N-2$	$(1-p)\cdot(1-2q)$	$p+2q-2pq$
derecha	$N-2$	$(1-p)\cdot(1-2q)$	$p+2q-2pq$
internas	$(M-2)\cdot(N-2)$	$(1-2p)\cdot(1-2q)$	$2p+2q-4pq$

De donde

$$\begin{aligned} P_e = 1 - & \frac{MN + 2Np - 2MNp + 2Mq - 2MNq + 4pq - 4Mpq - 4Npq + 4MNpq}{MN} = \\ = & -\frac{2Np - 2MNp}{NM} - \frac{2Mq - 2MNq}{NM} - \frac{4pq - 4Mpq - 4Npq + 4MNpq}{MN} = \\ = & -\frac{2-2M}{M} p - \frac{2-2N}{N} q - \frac{4 - 4M - 4N + 4MN}{MN} pq = \\ = & \frac{2M-2}{M} Q\left(\frac{a}{\sigma_n}\right) + \frac{2N-2}{N} Q\left(\frac{b}{\sigma_n}\right) - \frac{(2M-2)(2N-2)}{MN} Q\left(\frac{a}{\sigma_n}\right) Q\left(\frac{b}{\sigma_n}\right) \end{aligned}$$

4.

$$\beta = \frac{d_{min}^2}{E_{av}} = \frac{\left(2\min\left(a,b\right)\right)^2}{\frac{1}{3}\left(b^2\left(N^2-1\right)+a^2\left(M^2-1\right)\right)} = $$
$$= \frac{12\left(\min\left(a,b\right)\right)^2}{\left(b^2\left(N^2-1\right)+a^2\left(M^2-1\right)\right)} =$$

Si $M = N$ y $a = b$ entonces $\beta = \dfrac{12}{2\left(M^2-1\right)}$ (QAM).

5. Intuitivamente parece que debe haber interferencia entre símbolos. Demostrarlo a partir del calculo de $x(t)$ o $X(f)$ parece complejo. Es mucho más fácil intentar demostrar que $\langle\psi(t), \psi(t-nT)\rangle \neq \delta[n]$ y para ello basta encontrar un valor de $k \neq 0$ tal que $\langle\psi(t), \psi(t-kT)\rangle \neq 0$.

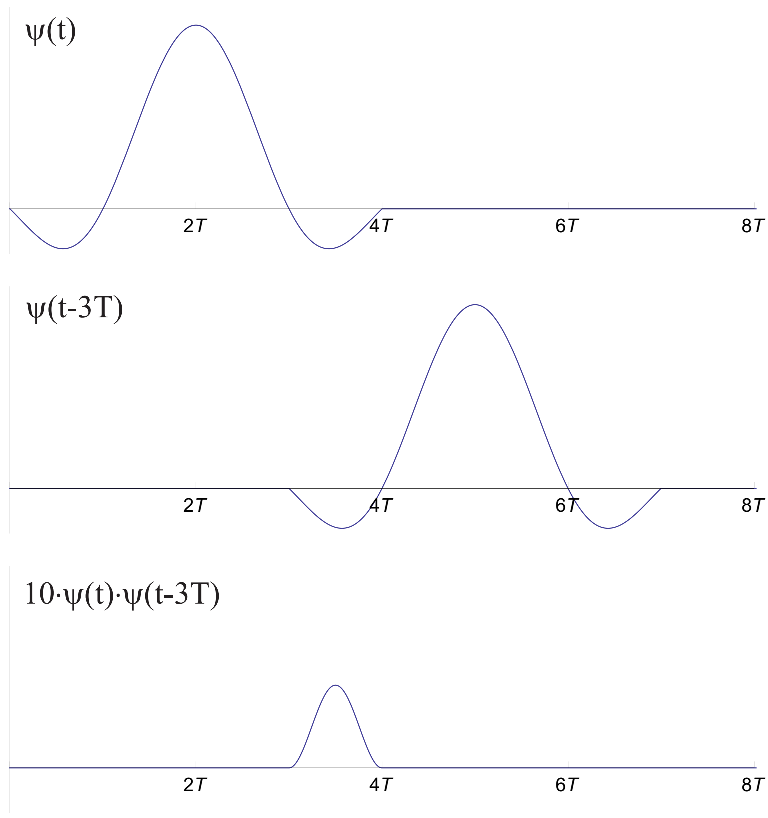


Figura 4: Cálculo de $\langle\psi\left(t\right), \psi\left(t-3T\right)\rangle$

Para evitar la realización de integrales, podemos utilizar el valor $k = 2$ ó $k = 3$ (ver figura 4 adjunta). Resulta $\psi(t)\psi(t-3T) > 0$ en el intervalo $(3T, 4T)$ y cero fuera de ese intervalo, por lo que

$$\langle\psi\left(t\right), \psi\left(t-3T\right)\rangle = \int_{-\infty}^{\infty}\psi(t)\cdot\psi^*(t-3T)\cdot dt =$$
$$= \int_{-\infty}^{\infty}\psi(t)\cdot\psi(t-3T)\cdot dt > 0 \neq \delta[3] = 0$$

porque el integrando tiene signo constante y es distinto de cero en un intervalo de longitud no nula. En consecuencia existirá IES.